Reader Vergleichsklausuren NRW 2000-2016

zusammengestellt von

M.Walther

	Anforderungstabelle 2017.....	2
Klausur 2016	Sonnenhöhenwinkel…….....	3
Klausur 2015	Wassertürme…….....	10
Klausur 2014	Verkehrsstau…….....	16
Klausur 2013	Persönliche Leistungskurve.....	20
Klausur 2012	Designerleuchten.....	25
Klausur 2011	Hochwasser.....	30
Klausur 2010	Titanwurz.....	34
Klausur 2009	Raps mit Stickstoff.....	37
Klausur 2008	Wetterstationen.....	39
Klausur 2006	Bakterien.....	41
Klausur 2005	Sportmedizin und Multiple Choice.....	43
Klausur 2004	Freizeitpark……	51
Klausur 2003	Fotosynthese……..	52
Klausur 2002	Internetseite……..	53
Klausur 2001	Kostenfunktion…….	55
Klausur 2000	Pumpspeicherwerk…….....	57

Lösungen

Ministerium für
Schule und Weiterbildung
des Landes Nordrhein-Westfalen

Konkretisierung der fachlichen Rahmenbedingungen für die Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2017

Curriculare Grundlage

Kernlehrplan (KLP) für die Sekundarstufe II Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen (2013)

Aufgaben

Die Klausur umfasst zwei Teile. Eine Aufgabenauswahl ist nicht vorgesehen. In Teil B werden für die Bearbeitung mit GTR bzw. CAS die gleichen Aufgaben gestellt.

Aufgabenteil	Aufgabentyp	Aufgaben	Dauer
Teil A	Aufgaben ohne Hilfsmittel (ohne Taschenrechner, ohne Formelsammlung)	Aufgabe 1 Aufgabe 2	max. 20 Minuten
Teil B	Aufgaben mit Hilfsmitteln (für GTR oder CAS)	Aufgabe 3 Aufgabe 4	min. 80 Minuten
		4	100 Minuten

Die Bewertungseinheiten entsprechen den Zeitanteilen.

Organisation

Zu Beginn der Klausur wird Teil A (Aufgaben ohne Hilfsmittel) bearbeitet; die Zeit beträgt maximal 20 Minuten. Wenn die Schülerin oder der Schüler die Aufgaben und die Lösungen abgegeben hat, werden ihr oder ihm die Aufgaben von Teil B sowie die dafür zugelassenen Hilfsmittel (GTR oder CAS; Formelsammlung) ausgehändigt. 2

Die Gesamtbearbeitungszeit für beide Teile beträgt zusammen 100 Minuten. Für Schülerinnen oder Schüler, die die Aufgaben und die Lösungen von Teil A vorzeitig abgeben, verlängert sich entsprechend die Bearbeitungszeit für Teil B.

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist in beiden Teilen der Klausur zugelassen.

Teil A – Aufgaben ohne Hilfsmittel

Bezug zu den Inhaltsfeldern und inhaltlichen Schwerpunkten des KLP*

Inhaltsfeld Funktionen und Analysis (A)	Inhaltsfeld Stochastik (S)
Grundlegende Eigenschaften von Potenz-, Exponential- und Sinusfunktionen	Mehrstufige Zufallsexperimente
Grundverständnis des Ableitungsbegriffs	Bedingte Wahrscheinlichkeiten
Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen Untersuchung ganzrationaler Funktionen bis zum Grad drei	

* Die Verbindlichkeit des Kernlehrplans bleibt von diesen Schwerpunktsetzungen und Konkretisierungen für die Zentrale Klausur unberührt.

Teil B – innermathematische und kontextbezogene Aufgaben mit Hilfsmitteln

Bezug zu den Inhaltsfeldern und inhaltlichen Schwerpunkten des KLP*

Inhaltsfeld Funktionen und Analysis (A)
Grundverständnis des Ableitungsbegriffs
Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen

* Die Verbindlichkeit des Kernlehrplans bleibt von diesen Schwerpunktsetzungen und Konkretisierungen für die Zentrale Klausur unberührt.

Ministerium für
Schule und Weiterbildung
des Landes Nordrhein-Westfalen

Name: _____

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2016

Mathematik

Teil I: Hilfsmittelfreier Teil

Aufgabe 1: Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 16 \cdot x - 2$.

Untersuchen Sie die Funktion f rechnerisch auf lokale Minimal- und Maximalstellen.

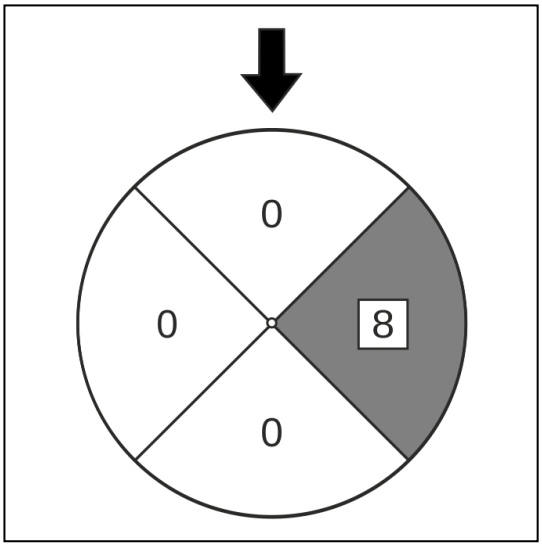
(6 Punkte)

3

Name: _____

Aufgabe 2: Stochastik

Beim Spiel „Die wilde 8“ wird das Glücksrad mit den beiden Zahlen 0 und 8 (siehe *Abbildung*) zweimal gedreht.



Abbildung

a) *Erstellen Sie für dieses Zufallsexperiment ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten.*

(2 Punkte)

b) Die beiden Zahlen in den Feldern, auf die jeweils der Pfeil zeigt, werden addiert.

(1) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass sich*

- *die Summe* 0 *ergibt,*
- *die Summe* 8 *ergibt,*
- *die Summe* 16 *ergibt.*

4

(2) Der Spieleinsatz für das zweimalige Drehen des Glücksrades beim Spiel „Die wilde 8“ beträgt 8 €.

- Bei der Summe 0 gibt es keine Auszahlung, der Spieleinsatz ist verloren.
- Bei der Summe 8 wird der Spieleinsatz zurückgezahlt.
- Bei der Summe 16 wird der zehnfache Spieleinsatz ausgezahlt.

Der Spielleiter behauptet, das Spiel sei „fair“. Das heißt, dass ein Spieler auf lange Sicht weder Gewinn noch Verlust macht.

Untersuchen Sie, ob es sich wirklich um ein faires Spiel handelt.

(2 + 2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Nur für den Dienstgebrauch!

Ministerium für
Schule und Weiterbildung
des Landes Nordrhein-Westfalen

Name: _____

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2016

Mathematik

Teil II: Innermathematische und kontextbezogene Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3: Analysis (innermathematische Aufgabe)

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{48} \cdot x^3 - \frac{3}{8} \cdot x^2 + \frac{27}{16} \cdot x + 1$.

Die *Abbildung 1* zeigt den Graphen von f.

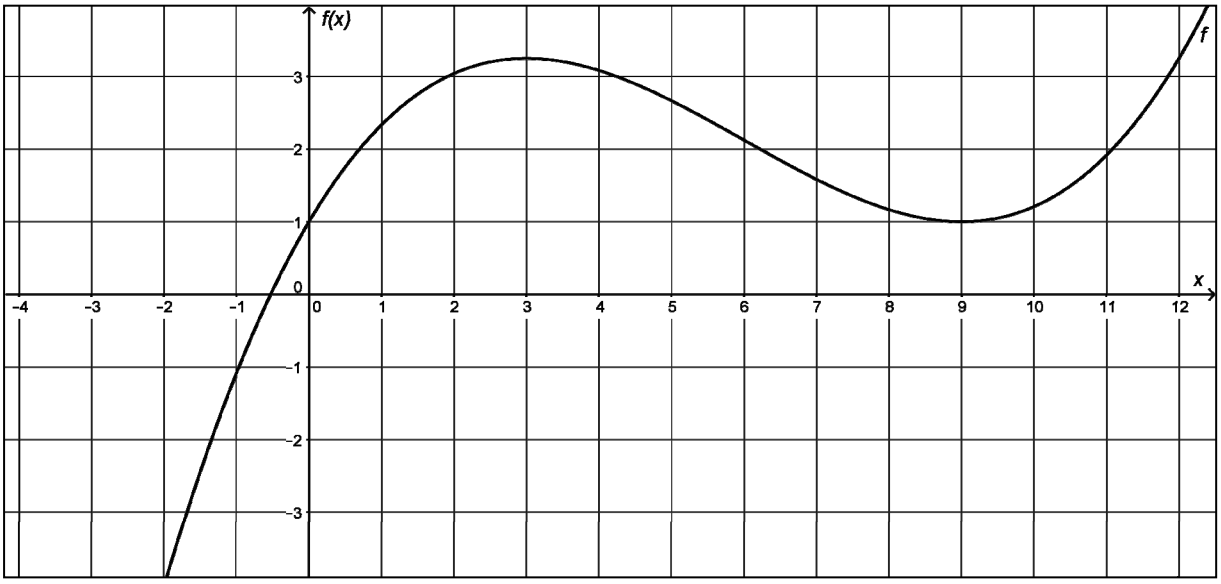


Abbildung 1

a) (1) *Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung der Geraden s durch die Punkte* $H\left(3 \middle| \frac{13}{4}\right)$ *und* $T(9|1)$.

[Zwischenergebnis: Die Gerade *s* hat die Steigung $-\frac{3}{8}$.]

(2) Es gibt zwei Stellen, an denen der Graph von f Tangenten hat, die parallel zur Geraden *s* verlaufen.

Ermitteln Sie diese Stellen auf zwei Nachkommastellen genau.

(5 + 4 Punkte)

Name: _____

b) Gegeben ist zusätzlich die Funktion g mit der Gleichung

$$g(x) = \frac{1}{48} \cdot x^3 - \frac{3}{16} \cdot x^2 + \frac{13}{4}.$$

(1) *Zeichnen Sie den Graphen von g in die Abbildung 1 ein.*

Der Graph der Funktion g geht durch eine Transformation aus dem Graphen der Funktion f hervor.

(2) *Geben Sie diese Transformation an.*

(3) *Geben Sie eine Funktionsgleichung von g an, aus der die Transformation deutlich wird, durch die der Graph von g aus dem Graphen von f hervorgeht.*

(4 + 2 + 2 Punkte)

6

Name: _____

c) Die folgenden *Abbildungen 2.1* bis *2.5* veranschaulichen, wie man den Wert der Ableitung $f'(2)$ näherungsweise ermitteln kann.

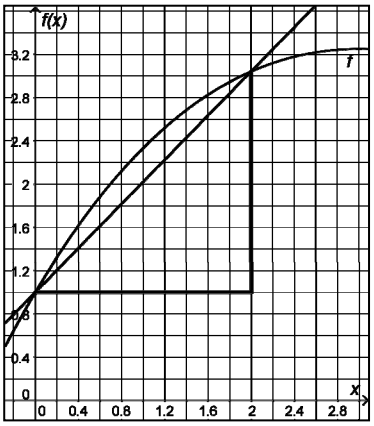


Abbildung 2.1

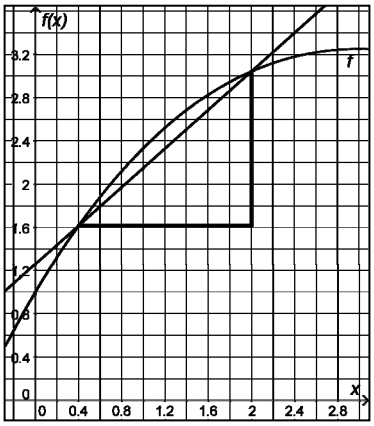


Abbildung 2.2

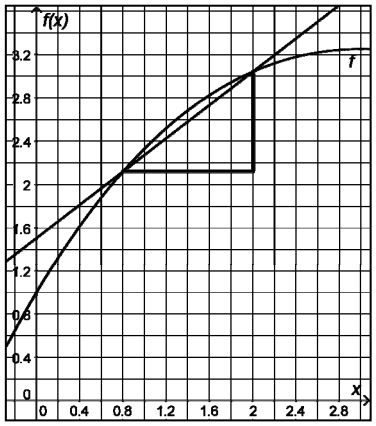


Abbildung 2.3

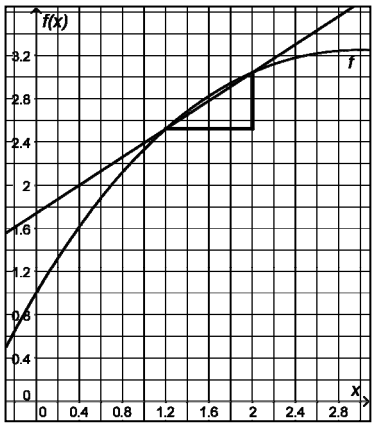


Abbildung 2.4

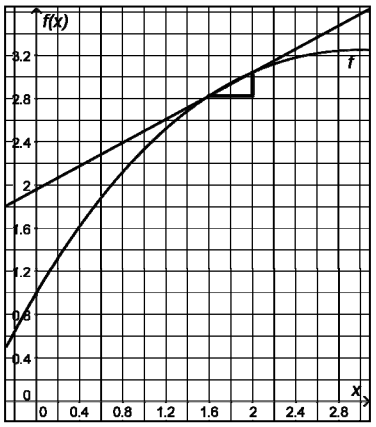


Abbildung 2.5

(1) *Geben Sie an, welche Abbildung zum Differenzenquotienten* $\dfrac{f(2)-f(0{,}8)}{2-0{,}8}$ *gehört.*

(2) *Geben Sie an, welche geometrische Bedeutung der Wert* $f'(2)$ *hat.*

Erklären Sie, warum in den Abbildungen 2.1 bis 2.5 veranschaulicht wird, wie dieser Wert immer genauer ermittelt werden kann.

(2 + 5 Punkte)

Name: _____

Aufgabe 4: Analysis (kontextbezogene Aufgabe)

Während seines Urlaubs im norwegischen Vardø beobachtet Heinz an einem Tag Anfang August die Sonne. Dabei misst er zu jeder vollen Stunde den Sonnenhöhenwinkel α (siehe *Abbildung 1*), um so zu bestimmen, wie hoch die Sonne über dem Horizont steht.

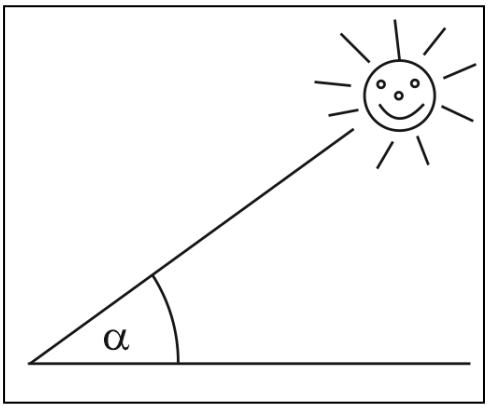


Abbildung 1

Heinz trägt seine Winkelmessungen in ein Koordinatensystem ein (siehe *Abbildung 2*).

Dabei entspricht $t = 0$ der Uhrzeit 12:00 Uhr mittags, $t = 1$ entspricht 13:00 Uhr usw.

Der Uhrzeit 11:00 Uhr entspricht $t = -1$ usw.

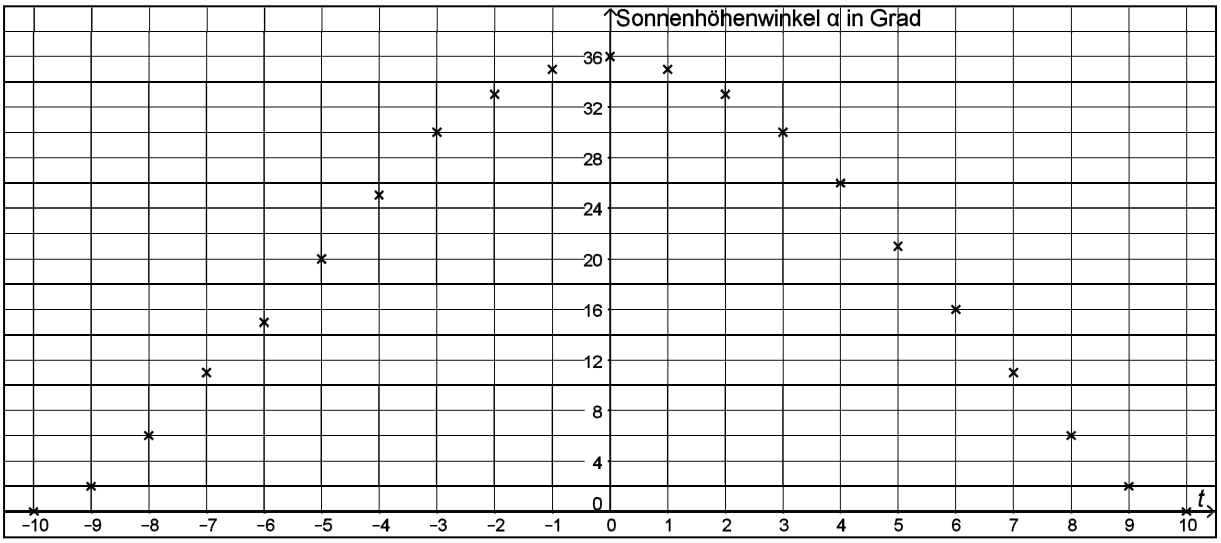


Abbildung 2

a) (1) *Geben Sie den Sonnenhöhenwinkel an, den Heinz um* 7:00 *Uhr morgens misst.*

(2) *Geben Sie an, in welchem Zeitraum Heinz Sonnenhöhenwinkel misst, die mindestens* 30 *Grad betragen.*

(2 + 2 Punkte)

Name: _____

Heinz modelliert anhand seiner Daten den Sonnenhöhenwinkel im Laufe des Tages mit einer ganzrationalen Funktion 4. Grades. Er verwendet dazu für $-10 \le t \le 10$ die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = 0{,}0031 \cdot t^4 - 0{,}671 \cdot t^2 + 36{,}1 \ .$$

$f(t)$ beschreibt den Sonnenhöhenwinkel in Grad zu der durch t gegebenen Uhrzeit.

b) Die Werte, die sich bei der Modellierung mit der Funktion f ergeben, weichen etwas von den Werten aus der *Abbildung 2* ab.

Berechnen Sie die Abweichung zwischen dem um 7:00 *Uhr morgens gemessenen Wert und dem entsprechenden Funktionswert.*

(2 Punkte)

c) Bei der Messung von Heinz erreicht die Sonne ihren höchsten Stand um 12:00 Uhr mittags (siehe *Abbildung 2*).

Weisen Sie rechnerisch nach, dass auch bei der Modellierung mit der Funktion f die Sonne zu diesem Zeitpunkt ihren höchsten Stand erreicht.

(7 Punkte)

9

d) (1) *Weisen Sie nach, dass gilt:* $f'(-9) > f'(-2)$.

(2) *Interpretieren Sie diese Ungleichung im Sachzusammenhang.*

(2 + 2 Punkte)

An einem Tag Ende August beobachtet Heinz noch einmal die Sonne in Vardø. Um 04:00 Uhr morgens während des Sonnenaufgangs misst er den Sonnenhöhenwinkel 0 Grad, um 12:00 Uhr mittags ist der Sonnenhöhenwinkel mit 29 Grad maximal. Heinz möchte für diesen Tag den Sonnenhöhenwinkel mit einer ganzrationalen Funktion g modellieren.

e) (1) *Skizzieren Sie in der Abbildung 2 den Verlauf eines möglichen Graphen von g.*

(2) Für die Funktionsgleichung von g wählt Heinz den Ansatz: $g(t) = a \cdot f(b \cdot t)$.

Ermitteln Sie für a und b jeweils einen zu seiner Messung passenden Wert.

(3 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Graphikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Computeralgebrasystem (CAS)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Ministerium für
Schule und Weiterbildung
des Landes Nordrhein-Westfalen

Name: _____

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2015

Mathematik

Teil I: Hilfsmittelfreier Teil

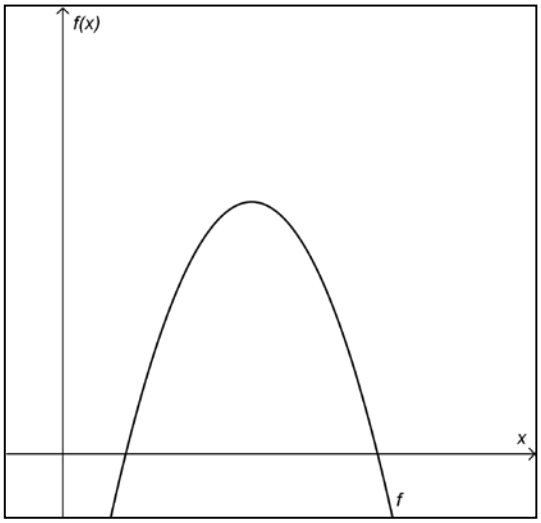
Aufgabe 1: Analysis

Die *Abbildung* zeigt den Graphen der Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -x^2 + 6 \cdot x - 5 .$$

a) (1) *Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.*

(2) *Skizzieren Sie in die Abbildung den Graphen der Ableitungsfunktion* f'.



Abbildung

(2 + 2 Punkte)

b) *Ermitteln Sie, um wie viele Einheiten der Graph von f nach unten verschoben werden muss, so dass der verschobene Graph nur einen gemeinsamen Punkt mit der x-Achse besitzt.*

(2 Punkte)

Name: _____

Aufgabe 2: Stochastik

Eine Firma hat einen neuen Wirkstoff gegen Erkältungsbeschwerden entwickelt, dessen Wirksamkeit an erkälteten Versuchspersonen getestet wurde:

- 60 % der Versuchspersonen erhielten eine Tablette mit dem neuen Wirkstoff, die übrigen Versuchspersonen erhielten eine Tablette ohne Wirkstoff.
- Nach einer Stunde trat insgesamt bei der Hälfte aller Versuchspersonen eine Linderung ein.
- 38 % der Versuchspersonen erhielten eine Tablette ohne Wirkstoff und verspürten keine Linderung.

a) *Stellen Sie den oben beschriebenen Sachverhalt dar, indem Sie alle Prozentsätze ermitteln und in die folgende Tabelle eintragen.*

	Linderung	keine Linderung	Gesamt
Tablette ohne Wirkstoff			
Tablette mit Wirkstoff			
Gesamt			

Tabelle

(3 Punkte)

b) Eine Versuchsperson verspürt eine Linderung.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie eine Tablette mit Wirkstoff erhalten hat.

(3 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Ministerium für
Schule und Weiterbildung
des Landes Nordrhein-Westfalen

Name: _____

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2015

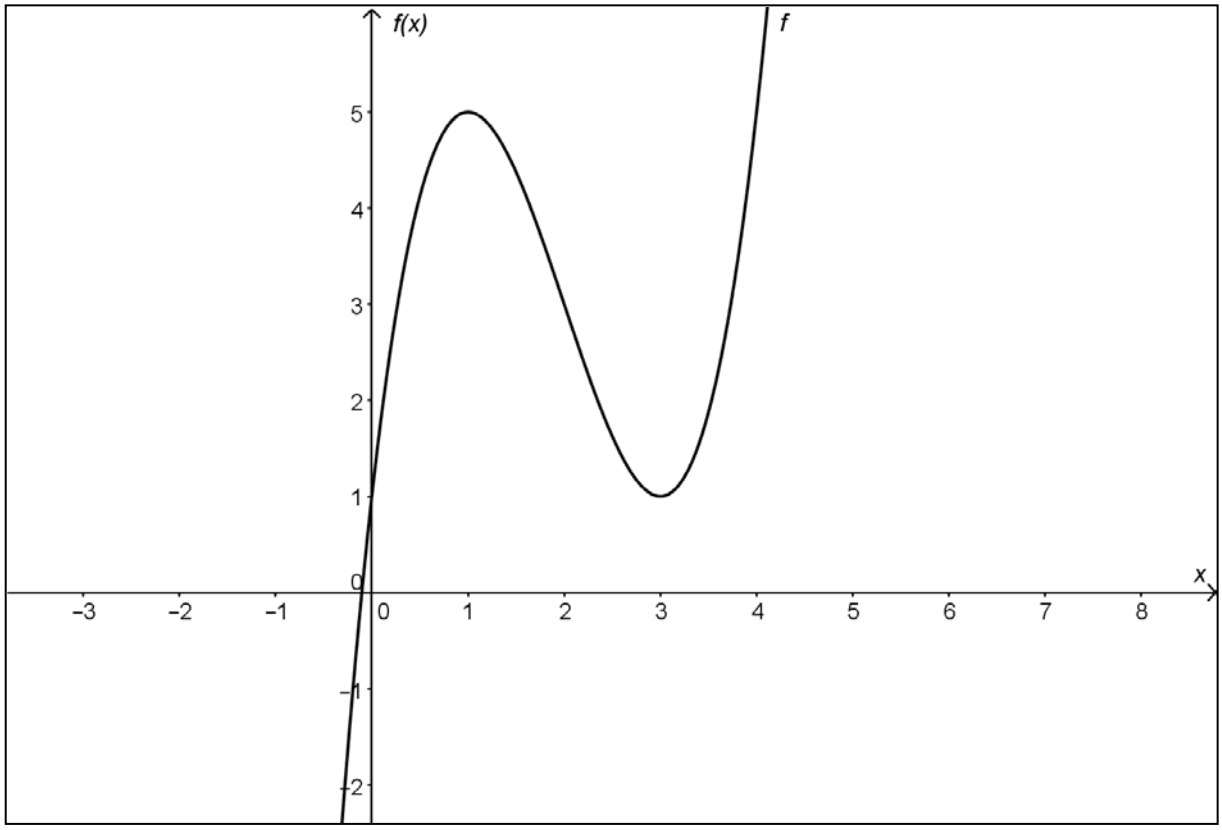
Mathematik

Teil II: Innermathematische und kontextbezogene Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3: Analysis (innermathematische Aufgabe)

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 1$.

Die *Abbildung* zeigt den Graphen von f.



Abbildung

Name: _____

a) *Ermitteln Sie auf drei Nachkommastellen genau die Nullstelle der Funktion f.*

(2 Punkte)

b) *Ermitteln Sie rechnerisch den lokalen Hochpunkt und den lokalen Tiefpunkt des Graphen von f.*

(7 Punkte)

c) *Zeichnen Sie in die Abbildung die Sekante s durch die Punkte* $P(2|3)$ *und* $Q(3|1)$ *ein.*

Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung dieser Sekante s.

(6 Punkte)

d) Ein Schüler möchte am Beispiel der Funktion f in einem Referat erklären, wie deren Ableitung $f'(a)$ an einer Stelle a näherungsweise ermittelt werden kann. Dazu hat er eine *Tabelle* angelegt.

Term	$\frac{f(2{,}4)-3}{2{,}4-2}$	$\frac{f(2{,}3)-3}{2{,}3-2}$	$\frac{f(2{,}2)-3}{2{,}2-2}$	$\frac{f(2{,}1)-3}{2{,}1-2}$
Wert	$-2{,}84$	$-2{,}91$	$-2{,}96$	$-2{,}99$

Tabelle

Geben Sie an, um welche Stelle a es sich hier handelt.

Erklären Sie, warum die Tabellenwerte sich immer mehr der Ableitung $f'(a)$ *annähern.*

(4 Punkte)

e) Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion g mit der Gleichung

$$g(x) = x^3 - 9 \cdot x^2 + 24 \cdot x - 18 .$$

Ermitteln Sie, durch welche Transformationen der Graph der Funktion g aus dem Graphen der Funktion f hervorgeht, und beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.

(5 Punkte)

Name: _____

Aufgabe 4: Analysis (kontextbezogene Aufgabe)

Früher wurden in den Städten auf Hügeln oder kleineren Bergen Wassertürme gebaut. Durch das in den Türmen gespeicherte Wasser konnte ein ausreichender Wasserdruck für die Versorgung der Wohnungen mit Trinkwasser sichergestellt werden.

Im Folgenden soll die Wassermenge im Speicher eines Wasserturms untersucht werden.

Um den nötigen Wasserdruck zu gewährleisten, soll dafür gesorgt werden, dass ständig mindestens 1000 m^3 Wasser (Sollwert) im Speicher des Turmes vorhanden sind. Die maximale Füllmenge beträgt 2000 m^3.

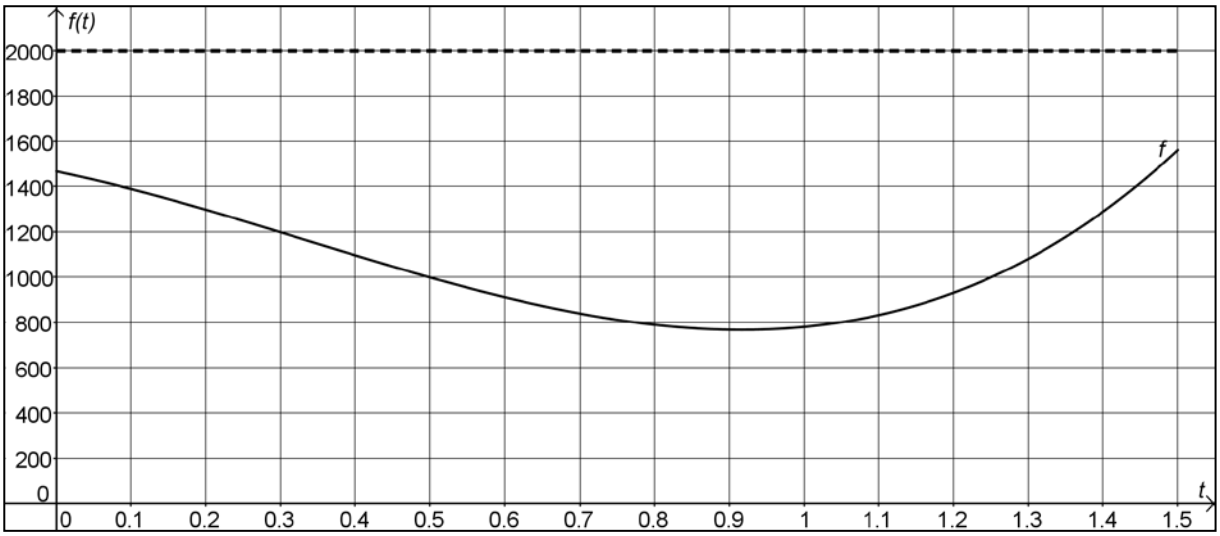
Für einen bestimmten Tag wird die Wassermenge im Speicher des Turmes im Zeitraum von 6:00 Uhr bis 7:30 Uhr für $0 \le t \le 1{,}5$ durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = 1000 \cdot t^3 - 1000 \cdot t^2 - 687 \cdot t + 1467$$

modelliert. Dabei bezeichnet t die Zeit in Stunden, die seit 6:00 Uhr vergangen ist, und $f(t)$ die Wassermenge im Speicher des Turmes in m^3.

Der Graph der Funktion f ist in der folgenden *Abbildung* dargestellt.

14



Abbildung

Mit der Funktion f ist es möglich, die folgenden Aufgabenstellungen zu bearbeiten.

Name: _____

a) (1) *Zeigen Sie, dass um 7:00 Uhr nur noch 780 m³ Wasser im Speicher des Turmes vorhanden sind.*

(2) *Ermitteln Sie näherungsweise die Zeiträume, in denen die Wassermenge über dem Sollwert von 1000 m^3 liegt.*

(2 + 4 Punkte)

b) *Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Wassermenge im Speicher des Turmes minimal ist.*

Berechnen Sie, um wie viele m^3 Wasser der Sollwert zu diesem Zeitpunkt unterschritten wird.

(8 Punkte)

c) *Berechnen Sie* $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$ *und* $f'(1)$ *und interpretieren Sie die berechneten Werte im Sachzusammenhang.*

(4 Punkte)

d) Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion *g* mit der Gleichung 15

$$g(t) = -1000 \cdot t^3 + 1000 \cdot t^2 + 687 \cdot t + 533.$$

(1) *Zeichnen Sie den Graphen von g in die Abbildung ein.*

(2) *Erklären Sie, welche Bedeutung die Funktionswerte* $g(t)$ *mit* $0 \le t \le 1{,}5$ *im Sachzusammenhang haben.*

(4 + 2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Graphikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Computeralgebrasystem (CAS)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Ministerium für
Schule und Weiterbildung
des Landes Nordrhein-Westfalen

Name: _____

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2014

Mathematik

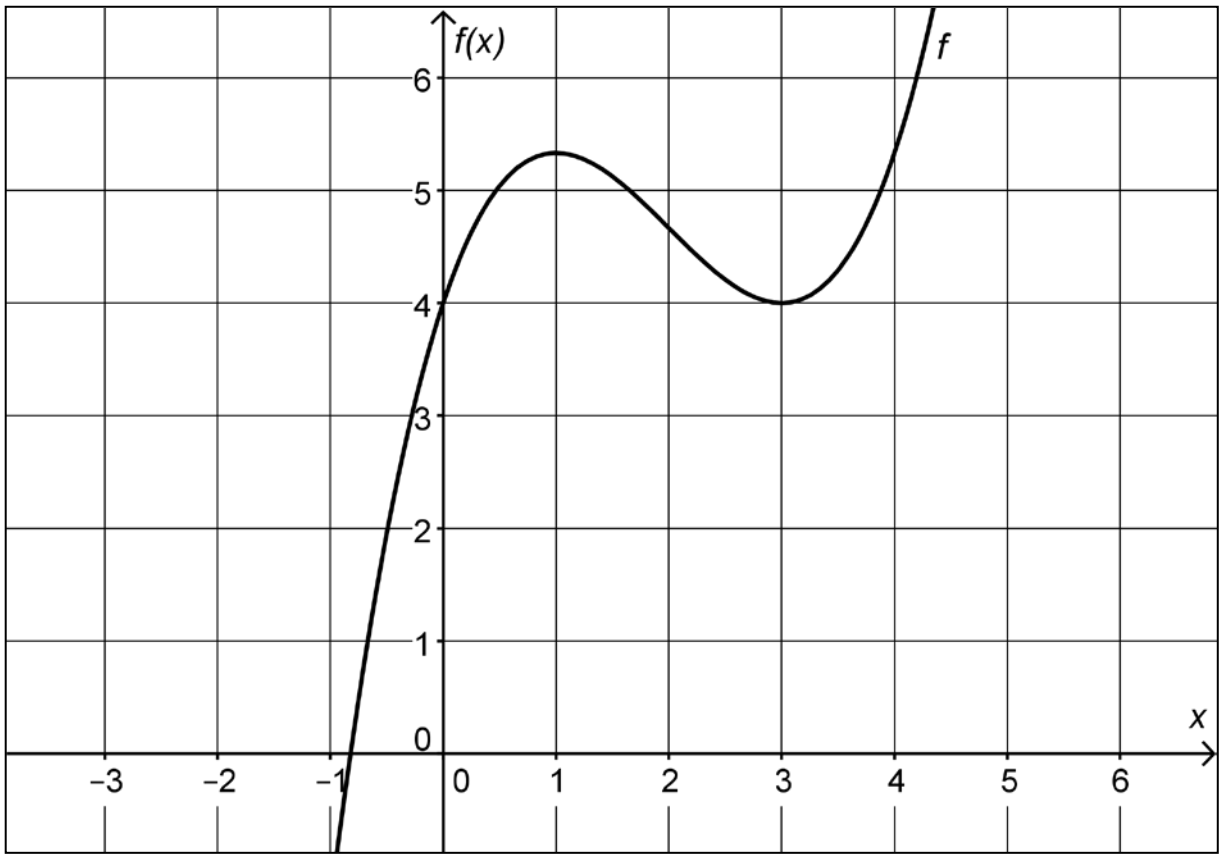
Aufgabenstellung

Aufgabe 1: Untersuchung ganzrationaler Funktionen

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 4 .$$

Der Graph der Funktion f ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



Abbildung

a) *Ermitteln Sie rechnerisch den lokalen Hochpunkt und den lokalen Tiefpunkt des Graphen von f.*

(8 Punkte)

Name: _____

b) (1) *Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f an der Stelle* $x = 0$.

(2) *Zeichnen Sie diese Tangente t in die Abbildung ein.*

(3) Die Tangente *t* bildet zusammen mit den beiden Achsen des Koordinatensystems ein Dreieck.

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Berechnen Sie auch den Umfang des Dreiecks.

(3+2+6 Punkte)

c) Der Graph der Funktion f wird nacheinander zwei Transformationen unterzogen. Dadurch ergibt sich der Graph einer Funktion *g*, für die Folgendes gilt:

1. Die Stellen $x = 2$ und $x = 4$ sind Extremstellen von *g*.
2. Die *x*-Achse ist eine Tangente an den Graphen von *g*.

Geben Sie begründet eine mögliche Funktionsgleichung von g an.

[Hinweis: Hier ist keine Rechnung erforderlich.]

(4 Punkte)

d) Die Funktion f wird nun als Ableitungsfunktion einer Funktion *F* betrachtet. 17

An der Nullstelle von *f* besitzt der Graph von *F* entweder einen lokalen Hochpunkt oder einen lokalen Tiefpunkt oder einen Sattelpunkt.

Entscheiden Sie begründet, welche dieser drei Möglichkeiten hier vorliegt.

(3 Punkte)

e) Ein Schüler versucht den Funktionsterm von f als ein Produkt darzustellen und wählt dazu den Ansatz $f(x) = (x+1) \cdot q(x)$, wobei *q* eine quadratische Funktion ist.

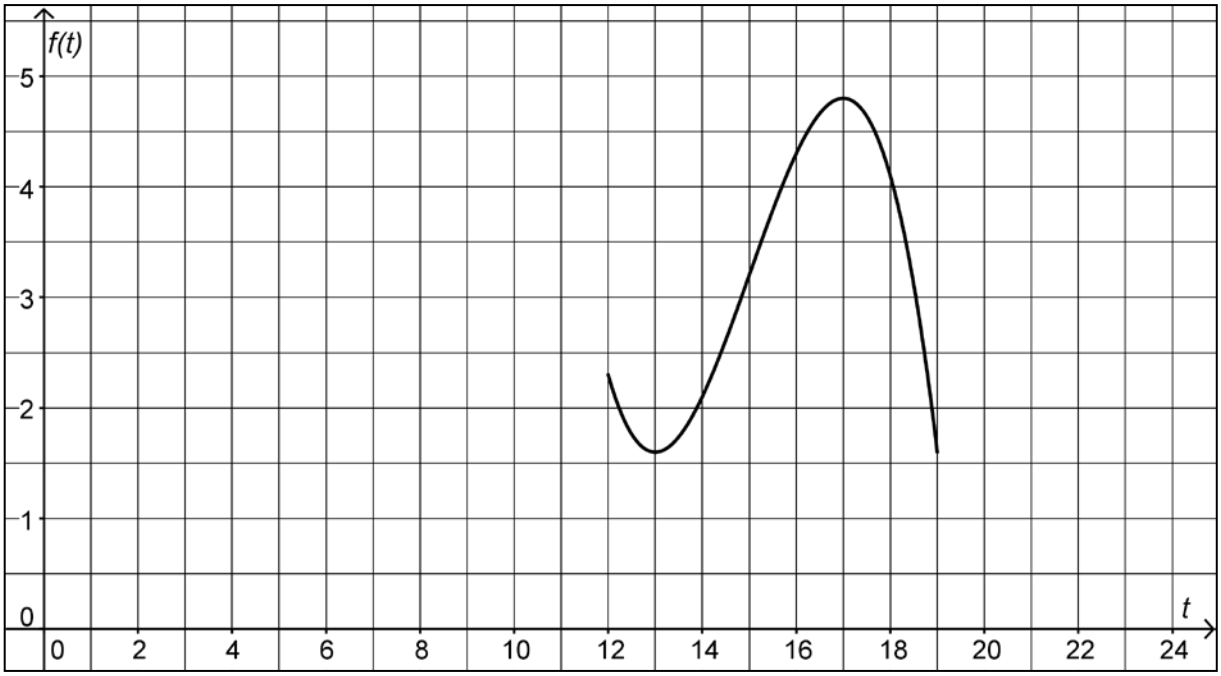
Begründen Sie, dass eine solche Darstellung nicht möglich ist. **(2 Punkte)**

Name: _____

Aufgabe 2: Verkehrsstau

An einer Autobahnbaustelle wurde über einen längeren Zeitraum die Stauentwicklung untersucht.

Für $12 \le t \le 19$ stellt der Graph der Funktion f modellhaft die Staulänge während eines bestimmten Tages in der Zeit von 12:00 Uhr bis 19:00 Uhr dar (siehe Abbildung).



Abbildung

18

Es gilt:

$$f(t) = -0{,}1 \cdot t^3 + 4{,}5 \cdot t^2 - 66{,}3 \cdot t + 322{,}7 \,.$$

Dabei ist t die Uhrzeit (z. B. 14:00 Uhr $\hat{=}$ $t = 14$) und $f(t)$ die Staulänge zur Zeit t in Kilometern. Mit dieser Funktion f ist es möglich, die folgenden Aufgabenstellungen zu bearbeiten.

a) (1) *Berechnen Sie die Länge des Staus um 13:00 Uhr.*

(2) Um abzuschätzen, wie viele Fahrzeuge um 13:00 Uhr im Stau stehen, müssen Annahmen getroffen werden.

Berechnen Sie mit Hilfe von zwei plausiblen Annahmen einen Schätzwert für die Anzahl der Fahrzeuge, die um 13:00 Uhr in diesem Stau stehen.

(2+3 Punkte)

Name: _____

b) *Ermitteln Sie rechnerisch die Uhrzeit, zu der die Staulänge im betrachteten Zeitraum maximal ist, und geben Sie die maximale Länge des Staus an.*

(9 Punkte)

c) *Bestimmen Sie, um wie viele Kilometer die Staulänge in der Zeit von 13:00 Uhr bis 17:00 Uhr pro Stunde im Durchschnitt zunimmt.*

(3 Punkte)

d) Für die Funktion f gelten für $15 < t < 17$ die beiden Ungleichungen:

$$f'(t) > 0 \text{ und } f''(t) < 0 .$$

Interpretieren Sie, welche Bedeutung diese beiden Ungleichungen im Sachzusammenhang der Aufgabe haben.

(4 Punkte)

e) Es kann davon ausgegangen werden, dass sich der Stau ab 19:00 Uhr gleichmäßig um 3,6 Kilometer pro Stunde verringert.

(1) *Bestimmen Sie die Uhrzeit, zu der sich der Stau vollständig aufgelöst hat.*

(2) Die Staulänge ab 19:00 Uhr soll mit einer geeigneten Funktion g modelliert werden.

Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung der Funktion g.

(3+4 Punkte)

19

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Ministerium für
Schule und Weiterbildung
des Landes Nordrhein-Westfalen

Name: _____

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2013

Mathematik

Aufgabenstellung

Aufgabe 1: Untersuchung ganzrationaler Funktionen

Gegeben ist die Funktion *f* mit der Gleichung:

$$f(x) = \frac{1}{6} \cdot x^3 - x^2 + 4$$

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der Funktion *f*.

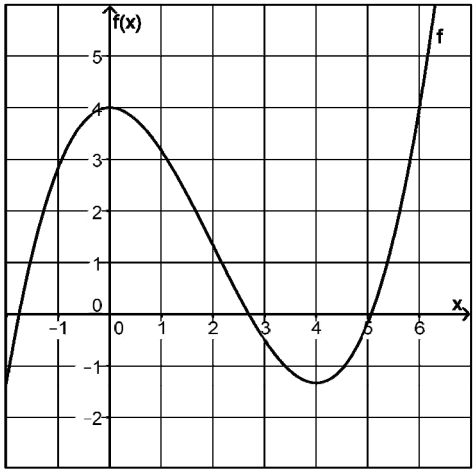


Abbildung 1

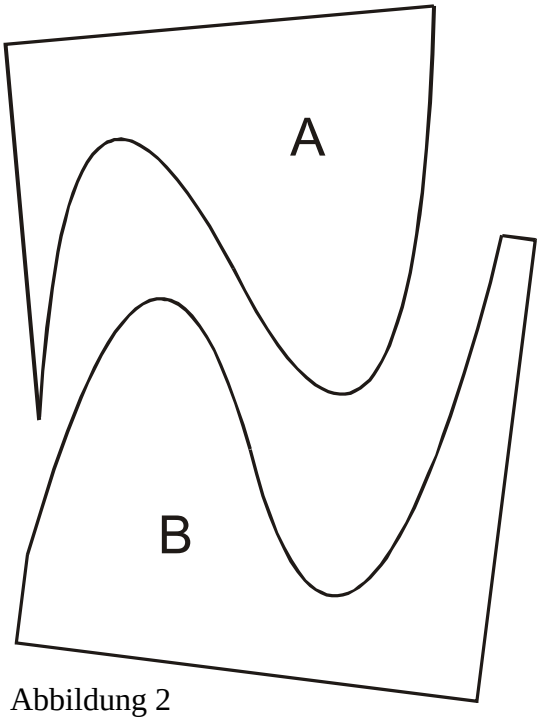


Abbildung 2

a) (1) *Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten des lokalen Hochpunktes und die Koordinaten des lokalen Tiefpunktes des Graphen der Funktion f.*

(2) *Berechnen Sie die Steigung der Geraden durch die beiden in a) (1) ermittelten lokalen Extrempunkte.*

(10 Punkte)

b) Die Abbildung 2 zeigt, wie durch den Graphen der Funktion *f* der in Abbildung 1 dargestellte Bereich des Koordinatensystems in zwei Teile A und B geteilt wird.

Entscheiden Sie begründet, ob der Punkt $P(2 \mid 1{,}3)$ *zu A oder zu B gehört.*

(3 Punkte)

Name: _____

c) (1) *Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt* $Q\left(1 \,\middle|\, \frac{19}{6}\right)$.

(2) *Zeigen Sie, dass die Tangente an den Graphen von f an der Stelle* $x = 3$ *parallel zur Tangente t aus c) (1) verläuft.*

(6 Punkte)

d) Die Abbildung 3 zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f'. Dieser Graph weist eine Achsensymmetrie auf.

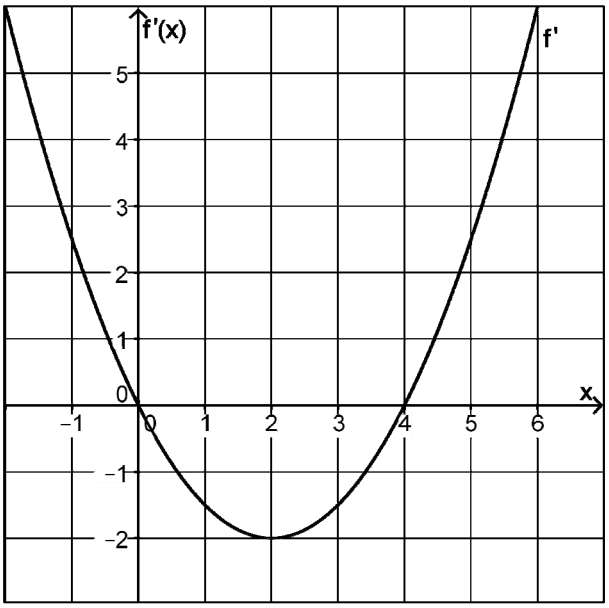


Abbildung 3

(1) *Zeichnen Sie die Symmetrieachse des Graphen von* f' *in die Abbildung 3 ein.*

(2) Die Achsensymmetrie des Graphen von f' kann durch die Gleichung

$$f'(2-a) = f'(2+a),\ a \in \mathbb{R}$$

beschrieben werden.

Zeigen Sie anhand des Graphen, dass für $a = 3$ *die Gleichung erfüllt ist, indem Sie geeignete Hilfslinien in die Abbildung 3 einzeichnen.*

(3) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Gleichung* $f'(2-a) = f'(2+a)$ *für jeden Wert von a gültig ist.*

(9 Punkte)

Name: _____

Aufgabe 2: Persönliche Leistungskurve

Jede Schülerin und jeder Schüler besitzt eine persönliche Leistungskurve, welche die Höhen und Tiefen der jeweiligen Konzentrationsfähigkeit im Tagesverlauf darstellt. Kennt man seine persönliche Leistungskurve, kann man diese z. B. für die sinnvolle Verteilung von Lernzeiten im Laufe eines Tages nutzen. Um seine eigene Leistungskurve zu erstellen, geht man folgendermaßen vor: An mehreren Tagen schätzt man etwa stündlich seine Leistungsfähigkeit auf einer Skala von 1 bis 10 ein (1: energielos, Sekundenschlaf; 10: topfit). Aus den zur jeweils gleichen Uhrzeit geschätzten Werten errechnet man die Durchschnittswerte. Mit diesen Durchschnittswerten lässt sich dann näherungsweise die persönliche Leistungskurve erstellen.

[Quelle: http://www.learning-in-activity.com/index.php?title=Auspr%C3%A4gungen_und_Optimierungsm%C3%B6glichkeiten_der_individuellen_Leistungskurve (letzter Zugriff am 22.10.2012)]

Der Graph aus Abbildung 1 stellt das Ergebnis des Selbstversuchs der Schülerin Frauke zur Ermittlung ihrer persönlichen Leistungskurve näherungsweise für den Zeitraum von 8:00 Uhr ($t = 0$) bis 15:00 Uhr ($t = 7$) dar.

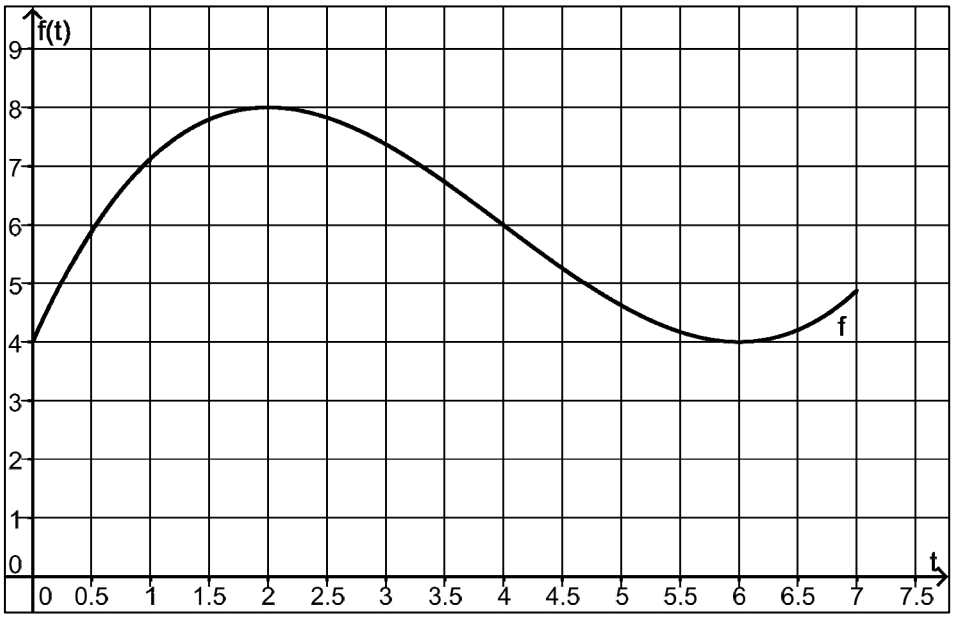


Abbildung 1

Dieser Graph lässt sich beschreiben durch die Funktion f mit

$$f(t) = 0{,}125 \cdot t^3 - 1{,}5 \cdot t^2 + 4{,}5 \cdot t + 4 .$$

Dabei wird der Zeit t in Stunden der Wert $f(t)$ für die subjektive Leistungsfähigkeit auf der Energieskala von 1 bis 10 zugeordnet. Mit dieser Funktion f ist es möglich, die folgenden Aufgabenstellungen zu bearbeiten.

Name: _____

a) *Berechnen Sie nach diesem Modell Fraukes subjektive Leistungsfähigkeit um 9:00 Uhr und um 15:00 Uhr.*

(4 Punkte)

b) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass Frauke um 10:00 Uhr mit dem Skalenwert 8 ihr persönliches Leistungshoch im untersuchten Zeitraum erreicht.*

(8 Punkte)

c) *Ermitteln Sie den Zeitpunkt im Zeitraum von 8:00 Uhr bis 15:00 Uhr, an dem die subjektive Leistungsfähigkeit von Frauke am stärksten abnimmt.*

Bestimmen Sie auch den Zeitpunkt im Zeitraum von 8:00 Uhr bis 15:00 Uhr, an dem ihre subjektive Leistungsfähigkeit am stärksten zunimmt.

(7 Punkte)

In der Abbildung 2 ist neben dem Graphen der Funktion f, der Fraukes subjektive Leistungsfähigkeit beschreibt, der Graph einer weiteren Funktion g abgebildet, der die subjektive Leistungsfähigkeit von Fraukes Mitschülerin Gaby beschreibt. Gaby hat ihr persönliches Leistungshoch um 10:30 Uhr mit einem Skalenwert von 9. Der Graph von g ergibt sich durch zwei Verschiebungen parallel zu den Koordinatenachsen aus dem Graphen von f.

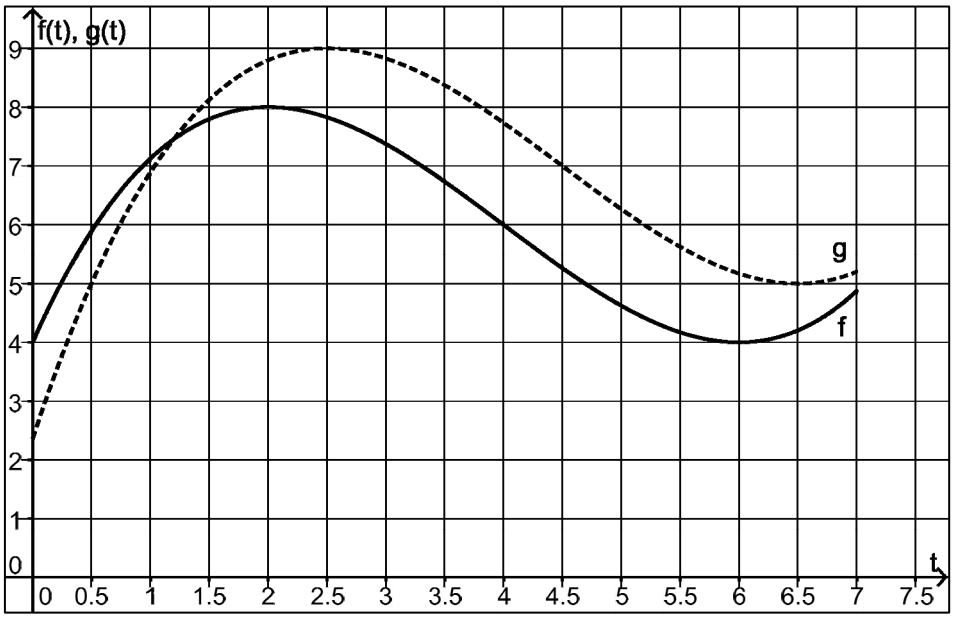


Abbildung 2

d) (1) *Beschreiben Sie, in welcher Weise sich der Graph von g durch zwei Verschiebungen des Graphen von f parallel zu den Koordinatenachsen ergibt.*

(2) *Geben Sie eine Funktionsgleichung von g an.*

[Hinweis: Hier sind keine Rechnungen erforderlich.]

(4 Punkte)

Name: _____

e) Die Leistungskurve eines dritten Schülers Hans verläuft in den ersten beiden Stunden ähnlich wie die Kurve von Frauke. Hans hat sein persönliches Leistungshoch ebenfalls um 10:00 Uhr, wobei sein maximaler Skalenwert allerdings 10 % über dem Wert von Frauke liegt. Um 12:00 Uhr befindet sich Hans in einem Leistungstief mit einem Skalenwert von 4. Dann steigt seine Leistungskurve zwei Stunden an und fällt schließlich bis 15:00 Uhr wieder ab.

(1) *Skizzieren Sie in Abbildung 1 einen möglichen Verlauf der Leistungskurve von Hans.*

(2) *Entscheiden Sie begründet, ob es sich bei der Leistungskurve von Hans um den Graphen einer ganzrationalen Funktion 3. Grades handeln kann.*

(5 Punkte)

24

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: _____

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2012

Mathematik

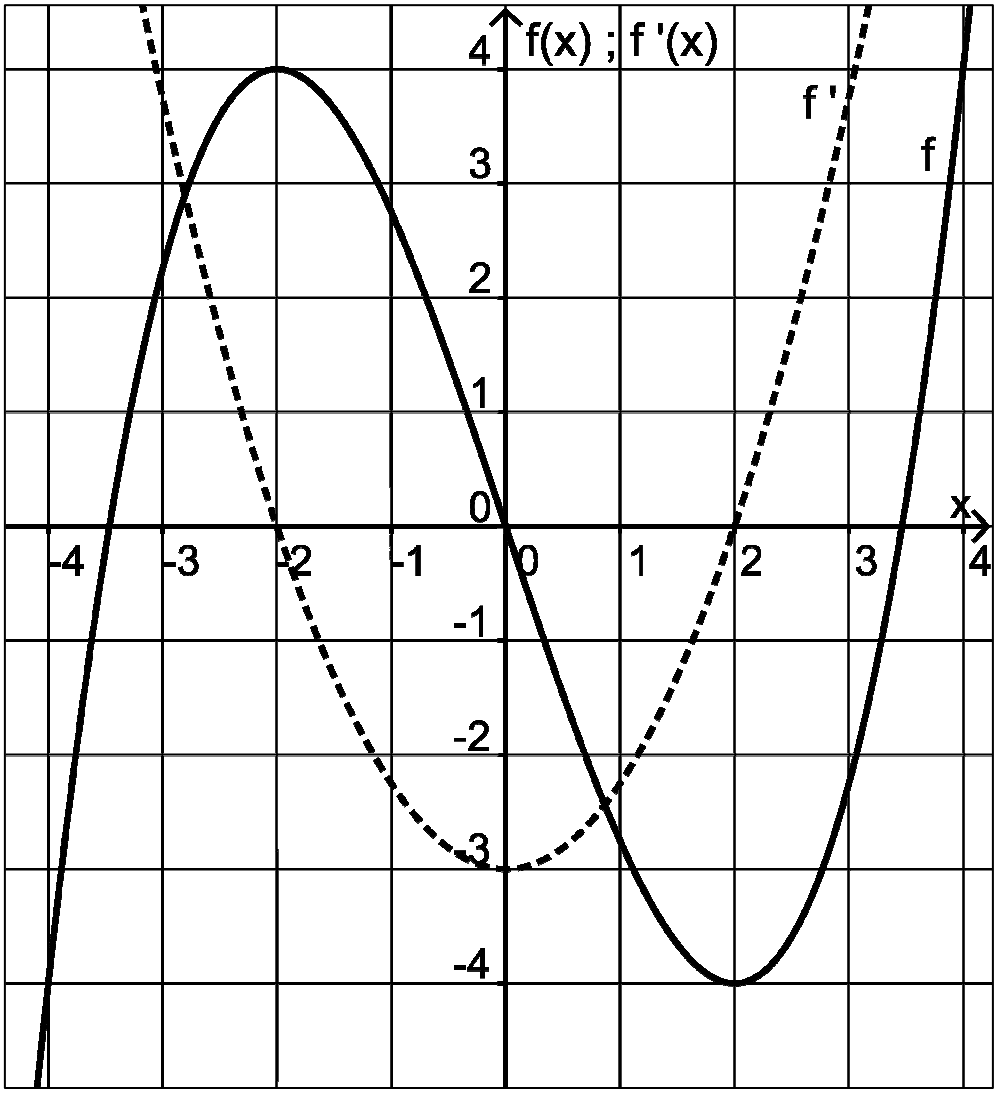
Aufgabenstellung

Aufgabe 1: Untersuchung ganzrationaler Funktionen

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^3 - 3 \cdot x \,.$$

Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktion f und ihrer ersten Ableitung f'.



Abbildung

Name: _____

a) *Untersuchen Sie anhand des Funktionsterms, ob der Graph der Funktion f symmetrisch ist.*

(2 Punkte)

b) Aus den Eigenschaften des Graphen der Funktion f ergeben sich Eigenschaften des Graphen der Funktion f'.

Geben Sie dafür zwei Beispiele an. Beziehen Sie sich dabei konkret auf Eigenschaften der beiden Graphen in der Abbildung.

(4 Punkte)

c) (1) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von f in* $H(-2|4)$ *einen lokalen Hochpunkt und in* $T(2|-4)$ *einen lokalen Tiefpunkt hat.*

(2) *Zeichnen Sie in die Abbildung die Gerade g ein, die durch die beiden lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f verläuft, und bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung dieser Geraden.*

[Kontrolllösung: $g: y = -2 \cdot x$] **(11 Punkte)**

d) Der Graph der Funktion f hat in zwei Punkten P_1 und P_2 Tangenten, die parallel zur Geraden g aus Teilaufgabe c) verlaufen.

(1) *Bestimmen Sie die Punkte* P_1 *und* P_2 *zeichnerisch unter Verwendung des Graphen der Funktion* f' *aus der Abbildung.*

Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

(2) *Bestimmen Sie durch eine Rechnung die genauen x-Koordinaten der Punkte* P_1 *und* P_2.

(7 Punkte)

e) (1) Der Graph von f wird parallel zu den Koordinatenachsen so verschoben, dass der verschobene Graph seinen lokalen Hochpunkt im Ursprung hat. Die Funktion, die zu dem verschobenen Graphen gehört, wird mit f_1 bezeichnet.

Geben Sie eine Funktionsgleichung von f_1 *an.*

[Hinweis: Hier in e) (1) sind keine Rechnungen erforderlich.]

(2) Nun wird die Gerade g in genau derselben Weise wie der Graph von f verschoben. Die verschobene Gerade wird mit g_1 bezeichnet.

Begründen Sie, dass die Geraden g und g_1 *identisch sind.* **(4 Punkte)**

26

26

Name: _____

Aufgabe 2: Kostenfunktion

Ein Hersteller von Designerleuchten möchte ein neues Lampenmodell produzieren. Um damit einen Gewinn zu erzielen, stellt er zunächst Überlegungen zu den Gesamtkosten der Produktion und dem Verkaufspreis der Lampen an. Die Gesamtkosten der Produktion in Abhängigkeit von der Stückzahl schätzt der Hersteller aufgrund seiner bisherigen Erfahrungen mit der Kostenfunktion K ab. Der Graph von K ist in der Abbildung 1 dargestellt.

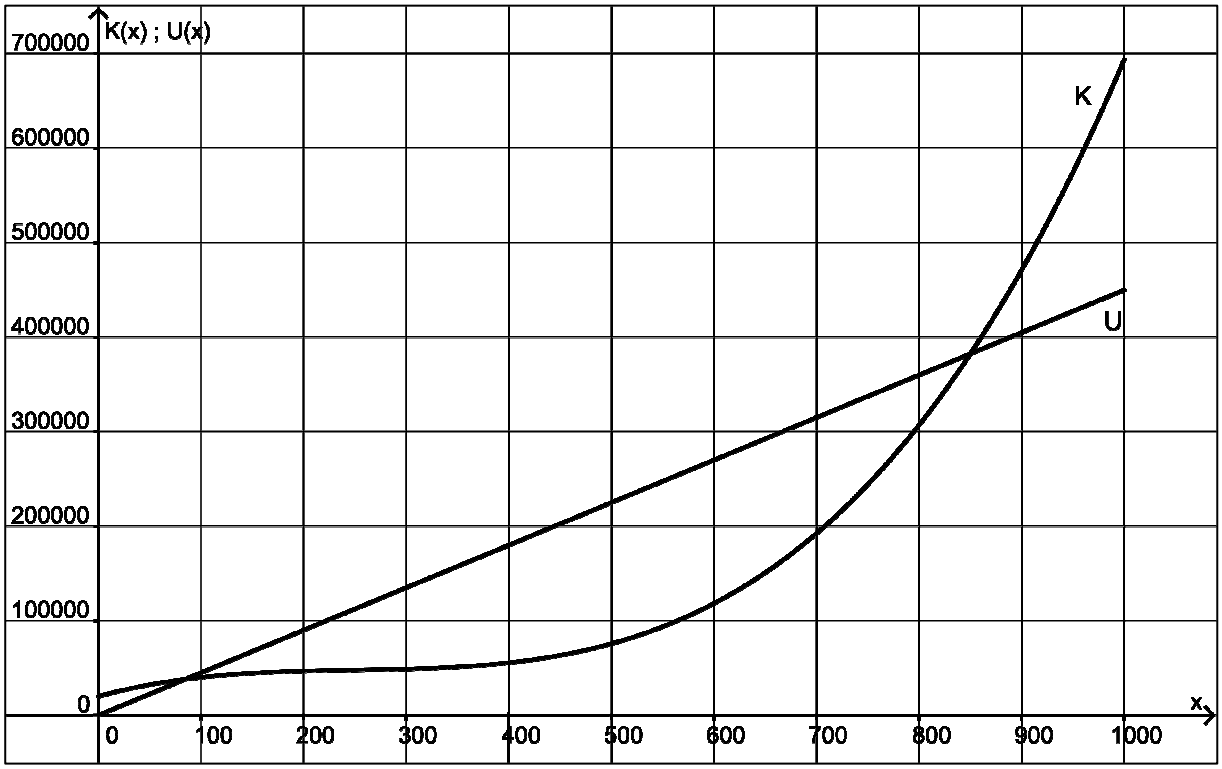


Abbildung 1

Die Funktionsgleichung von K ist

$$K(x) = 0{,}0015 \cdot x^3 - 1{,}125 \cdot x^2 + 298{,}8 \cdot x + 20\,000\,.$$

Dabei bezeichnet

x: die Anzahl der produzierten Lampen

$K(x)$: die Gesamtkosten für die Produktion von x Lampen in Euro.

Mit der Funktion K ist es möglich, die Aufgabenteile a) bis d) zu beantworten. Die Untersuchungen werden im Folgenden auf den Bereich $0 \le x \le 1000$ beschränkt, d. h. es sollen nicht mehr als 1000 Lampen produziert werden.

Name: _____

a) *Berechnen Sie die Gesamtkosten, die für 560 produzierte Lampen anfallen.*

(2 Punkte)

b) (1) *Untersuchen Sie rechnerisch die Kostenfunktion K auf lokale Extremstellen.*

(2) In b) (1) ergibt sich, dass die Kostenfunktion keine lokalen Extremstellen besitzt.

Begründen Sie, dass diese Tatsache im Sachzusammenhang sinnvoll ist.

(8 Punkte)

c) (1) *Bestimmen Sie rechnerisch die Wendestelle* x_W *der Kostenfunktion K.*

[Zur Kontrolle: $x_W = 250$]

(2) Für $x > 250$ ist der Graph der Kostenfunktion *K* linksgekrümmt.

Erklären Sie die Bedeutung dieser Tatsache im Sachzusammenhang.

(8 Punkte)

Aufgrund einer Marktanalyse geht der Hersteller davon aus, dass er jede produzierte Lampe zu einem Stückpreis von 450 € verkaufen kann. Wenn er *x* Lampen produziert, kann der Hersteller also durch die Funktion *U* mit $U(x) = 450 \cdot x$ berechnen, wie viel Geld er von seinen Kunden insgesamt erhält. Dieser Geldbetrag wird als Umsatz des Herstellers bezeichnet.

28

d) (1) Der Graph der Umsatzfunktion *U* ist in Abbildung 1 dargestellt.

Bestimmen Sie aus der Abbildung 1 näherungsweise, bei welchen Produktionsmengen der Hersteller einen Gewinn macht, und begründen Sie Ihr Ergebnis.

(2) Der Hersteller hat berechnet, dass sein Gewinn bei 560 produzierten Lampen maximal ist.

[Hinweis: Diese Tatsache sollen Sie nicht nachweisen.]

Ermitteln Sie diesen maximalen Gewinn.

(6 Punkte)

Name: _____

Der Lampenhersteller denkt über den Einsatz anderer Materialien nach. Dies führt zu veränderten Kosten- und Umsatzfunktionen K_{neu} und U_{neu}. Die Graphen dieser veränderten Funktionen sind in der Abbildung 2 dargestellt.

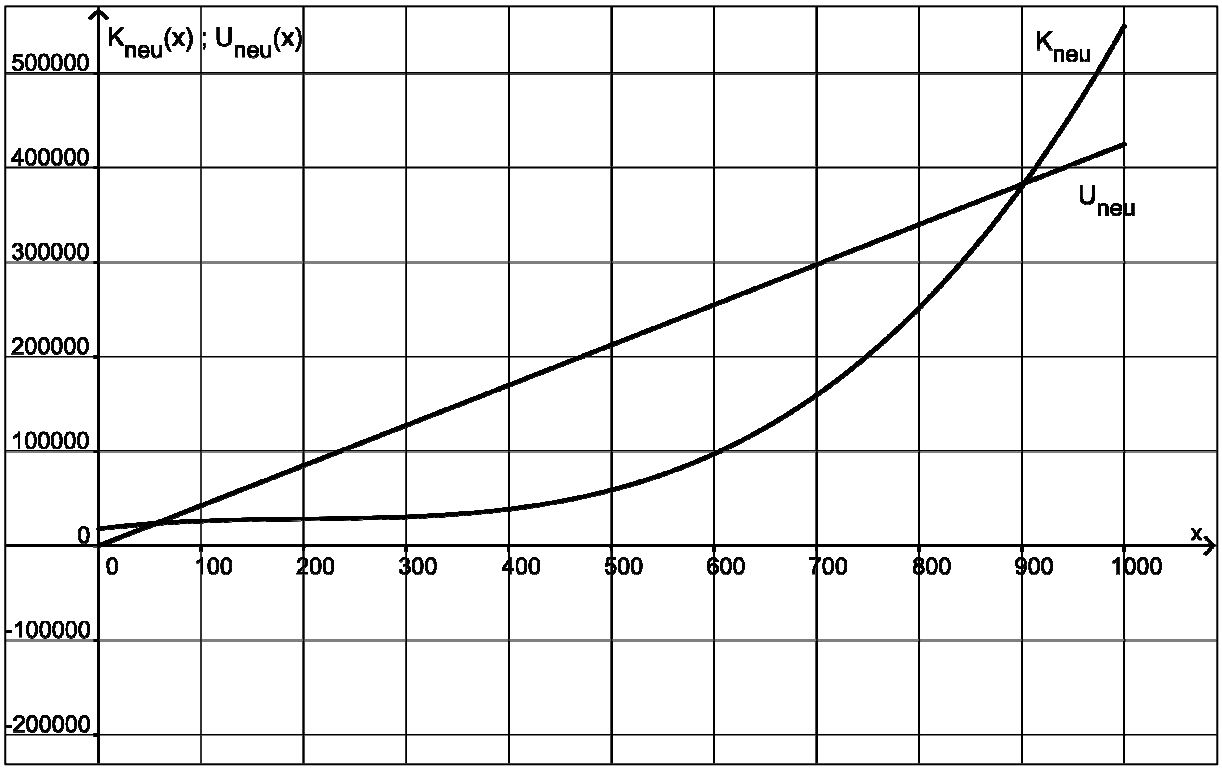


Abbildung 2

e) *Zeichnen Sie in die Abbildung 2 den Verlauf des Graphen der zugehörigen Gewinnfunktion G_{neu} im Bereich $0 \le x \le 1000$ ein. Wesentliche Merkmale des Graphen von G_{neu} sollen in Ihrer Zeichnung erkennbar sein.*

(4 Punkte)

29

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2011

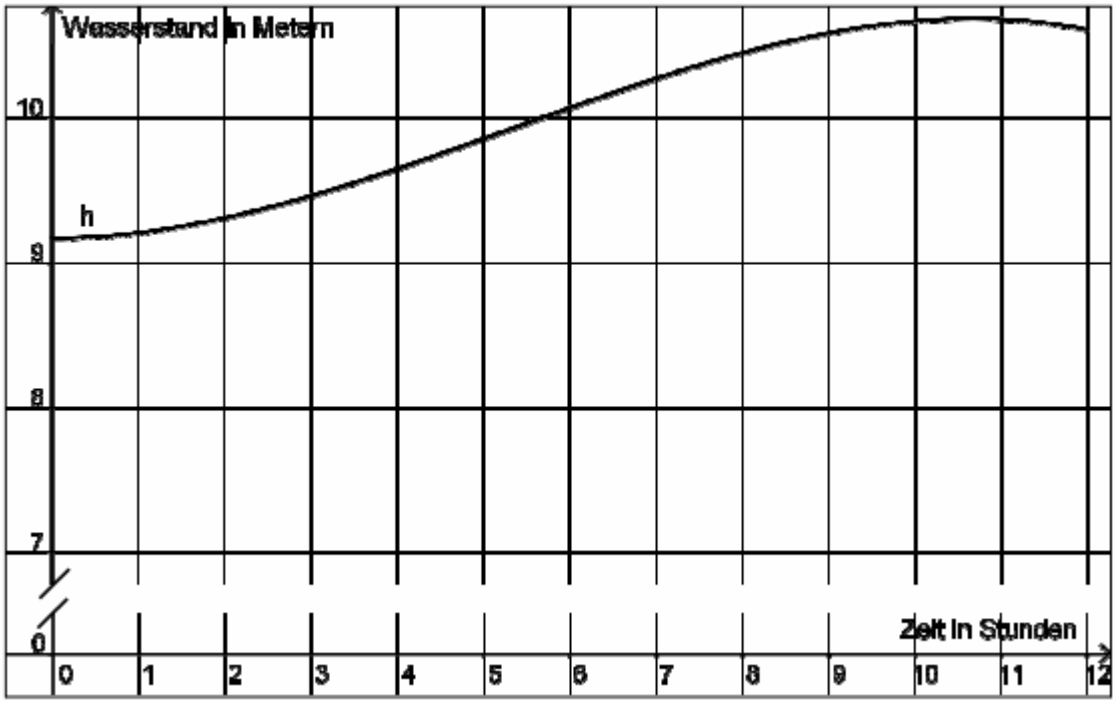
Mathematik

Aufgabe 1

Aufgabenstellung

In Nordrhein-Westfalen sind Hochwasser nichts Unbekanntes. Insbesondere die Rheinschiene im Großraum Köln/Bonn war im Dezember 1993 und im Januar 1995 stark von den Rhein-Überschwemmungen betroffen. In den ersten Tagen des Jahres 1995 ließen anhaltende Regenfälle und die beginnende Schneeschmelze in den Mittelgebirgen den Rhein auf die Rekordhöhe des 20. Jahrhunderts steigen.

Bei diesem Hochwasser wurde an einer Messstation zwölf Stunden lang der Wasserstand aufgezeichnet. Für $0 \le t \le 12$, d. h. für den Beobachtungszeitraum von zwölf Stunden, stellt der Graph der Funktion h modellhaft die Höhe des Wasserstandes an dieser Messstation dar.



30

Es gilt:

$$h(t) = -0{,}0025 \cdot t^3 + 0{,}04 \cdot t^2 + 9{,}17$$

t: Zeit in Stunden seit dem Beobachtungsbeginn am 27. Januar 1995 um 0:00 Uhr

$h(t)$: Wasserstand in Metern

Mit dieser Funktion h ist es möglich, die folgenden Aufgabenstellungen zu bearbeiten.

a) *Berechnen Sie die Höhe des Wasserstandes am 27. Januar 1995 um 7:30 Uhr.*

(2 Punkte)

b) *Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der der Wasserstand in den ersten acht Stunden des Beobachtungszeitraumes durchschnittlich anstieg.*

(4 Punkte)

c) *Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem der höchste Wasserstand an der Messstation erreicht wurde.*

Berechnen Sie diesen Höchststand.

(10 Punkte)

d) *Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Wasserstand am schnellsten anstieg.*

(6 Punkte)

e) An einer zweiten Messstation war die Entwicklung des Wasserstandes in weiten Teilen vergleichbar mit dem Verlauf an der ersten Messstation. Allerdings wurde hier der höchste Wasserstand erst zu einem späteren Zeitpunkt gemessen und hatte eine geringere Höhe als an der ersten Messstation.

Die Entwicklung des Wasserstandes an der zweiten Messstation kann durch eine Funktion g mit $g(t) = a \cdot h(t+b)$ beschrieben werden.

Geben Sie einen Zahlenbereich für a und einen Zahlenbereich für b so an, dass der oben beschriebene neue Sachverhalt sinnvoll modelliert werden kann, und begründen Sie Ihre Wahl.

31

(6 Punkte)

Aufgabe 2

Aufgabenstellung

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -\tfrac{1}{2} \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 - 14 \cdot x + 9 .$$

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der Funktion f.

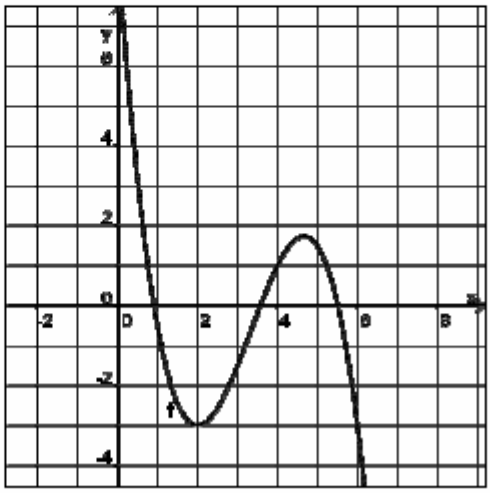


Abbildung 1

32

a) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von f die lokalen Extrempunkte* $T\left(2 \middle| -3\right)$ *und* $H\left(\tfrac{14}{3} \middle| \tfrac{47}{27}\right)$ *besitzt.*

(9 Punkte)

b) *Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt* $B\left(5 \middle| \tfrac{3}{2}\right)$.

(Zur Kontrolle: $t(x) = -\tfrac{3}{2} \cdot x + 9$) **(4 Punkte)**

c) Neben dem Berührpunkt B hat die Tangente t noch einen weiteren gemeinsamen Punkt S mit dem Graphen von f.

Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten von S. **(5 Punkte)**

Name: _____

a) *Berechnen Sie die Gesamtkosten, die für 560 produzierte Lampen anfallen.*

(2 Punkte)

b) (1) *Untersuchen Sie rechnerisch die Kostenfunktion K auf lokale Extremstellen.*

(2) In b) (1) ergibt sich, dass die Kostenfunktion keine lokalen Extremstellen besitzt.

Begründen Sie, dass diese Tatsache im Sachzusammenhang sinnvoll ist.

(8 Punkte)

c) (1) *Bestimmen Sie rechnerisch die Wendestelle* x_W *der Kostenfunktion K.*

[Zur Kontrolle: $x_W = 250$]

(2) Für $x > 250$ ist der Graph der Kostenfunktion *K* linksgekrümmt.

Erklären Sie die Bedeutung dieser Tatsache im Sachzusammenhang.

(8 Punkte)

Aufgrund einer Marktanalyse geht der Hersteller davon aus, dass er jede produzierte Lampe zu einem Stückpreis von 450 € verkaufen kann. Wenn er *x* Lampen produziert, kann der Hersteller also durch die Funktion *U* mit $U(x) = 450 \cdot x$ berechnen, wie viel Geld er von seinen Kunden insgesamt erhält. Dieser Geldbetrag wird als Umsatz des Herstellers bezeichnet.

33

d) (1) Der Graph der Umsatzfunktion *U* ist in Abbildung 1 dargestellt.

Bestimmen Sie aus der Abbildung 1 näherungsweise, bei welchen Produktionsmengen der Hersteller einen Gewinn macht, und begründen Sie Ihr Ergebnis.

(2) Der Hersteller hat berechnet, dass sein Gewinn bei 560 produzierten Lampen maximal ist.

[Hinweis: Diese Tatsache sollen Sie nicht nachweisen.]

Ermitteln Sie diesen maximalen Gewinn.

(6 Punkte)

Vergleichsklausur 2010 für die Jahrgangsstufe 11

Aufgabenstellung
Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 12x - 9$.

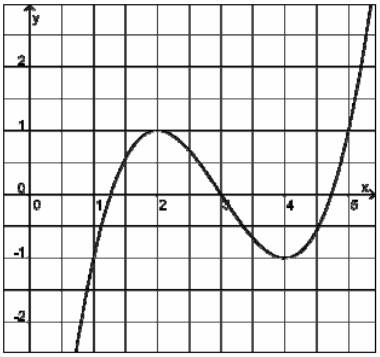


Abbildung 1

Die Abbildung 1 zeigt den zu f gehörigen Graphen.

a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von f in H(2|1) einen Hochpunkt und in T(4|-1) einen Tiefpunkt besitzt.

(8 Punkte)

b) Die Funktion f lässt sich auch darstellen in der Form:
$f(x) = (x-3)(0{,}5x^2 - 3x + 3)$.
Ermitteln Sie alle Nullstellen von f und geben Sie diese nicht als Näherungswerte, sondern exakt an.

(3 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass der Graph von f den Wendepunkt W(3|0) besitzt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Wendetangente an den Graphen von f.

(7 Punkte)

d) Entscheiden Sie, ob die Aussagen A bis C jeweils wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Entscheidungen.

A Die Steigung der Geraden durch die Punkte *T*(4|-1) und *A*(6| *f* (6)) beträgt 5.
B Der Graph der Ableitungsfunktion f' fällt für $x > 3$.
C Die Funktionswerte der Ableitung von *f* sind nie kleiner als -1 ,5 .

(8 Punkte)

e) Der Graph der Funktion *f* wird jetzt zwei einfachen Veränderungen unterzogen. Dabei entstehen
jeweils die beiden Graphen der Abbildungen 2A und 2B.

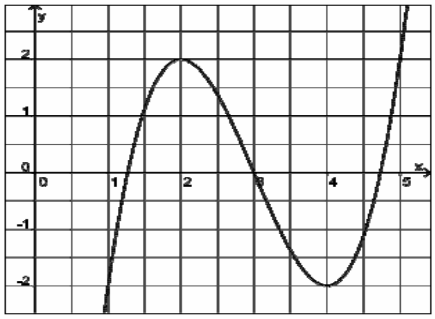


Abbildung 2A

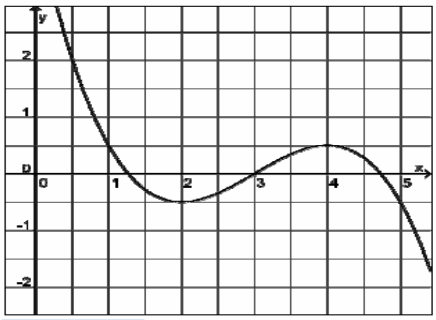


Abbildung 2B

(1) Beschreiben Sie, wie der Graph in Abbildung 2A aus dem Graphen von f hervorgeht,
und geben Sie an, welche Funktionsgleichung zu dem Graphen in dieser Abbildung passt, indem Sie diese aus den Möglichkeiten (A1) – (A3) auswählen.

(A1) $g_1(x) = 2f(x)$

(A2) $g_2(x) = 0{,}5f(x)$

(A3) $g_3(x) = f(x) + 1$

(2) Beschreiben Sie, wie der Graph in Abbildung 2B aus dem Graphen von f hervorgeht, und geben Sie zu dem Graphen in dieser Abbildung dann entsprechend selber eine geeignete Funktionsgleichung an.

(6 Punkte)

Aufgabe 2

Aufgabenstellung

Die Titanwurz ist die Pflanze, die die größte Blüte der Welt hervorbringt. 35

Für ein Referat hat ein Schüler in einem deutschen Gewächshaus eine solche Pflanze täglich beobachtet und ihre Blütenhöhenotiert. Er hat berechnet, dass sich die Höhe der Blüte während seiner Beobachtung gut durch die Funktion *h* mit $h(t) = -0{,}015t^3 + 0{,}45t^2 + 2$ beschreiben lässt.

Dabei bezeichnet *t* die Anzahl der Tage, die seit dem Beobachtungsbeginn vergangen sind und *h*(*t*) die Höhe der Blüte in cm. Der Graph von *h* ist in Abbildung 1 dargestellt.

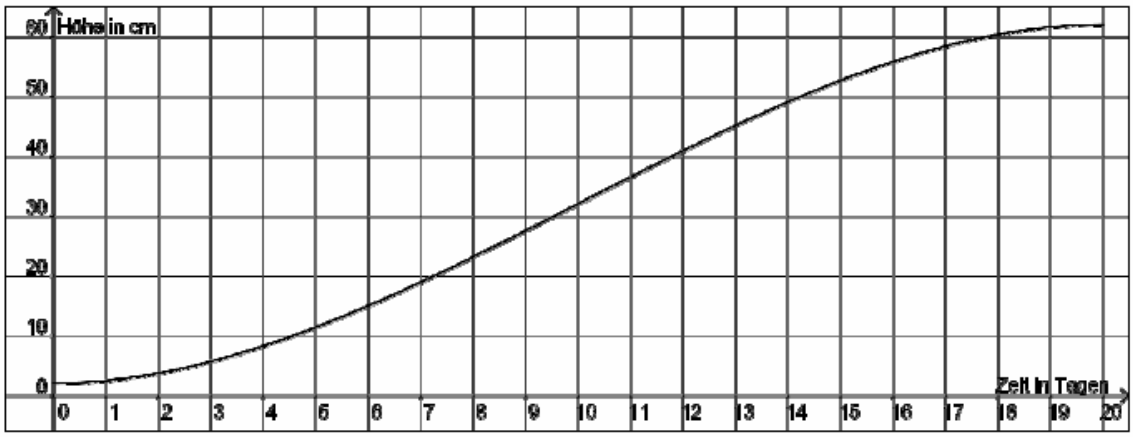


Abbildung 1

Mit dieser Funktion *h* ist es möglich, die folgenden Aufgaben a) bis d) zu bearbeiten.

a) *Berechnen Sie die Höhe der Blüte* 3 *Tage nach Beobachtungsbeginn.* **(3 Punkte)**

b) Berechnen Sie $\frac{h(3)-h(0)}{3-0}$ und berechnen Sie h' (3) .

Geben Sie an, welche Bedeutung diese beiden von Ihnen berechneten Ergebnisse im gegebenen Sachzusammenhang haben. **(8 Punkte)**

c) Ermitteln Sie rechnerisch, nach wie vielen Tagen ab Beobachtungsbeginn die Blüte der Pflanze ihre maximale Höhe erreicht.Berechnen Sie die maximale Höhe der Blüte. **(9 Punkte)**

d) Manche Botanische Gärten geben zwei Tage vor dem Zeitpunkt, an dem die Blüte der Pflanze am schnellsten wächst, ein besonderes Düngemittel. Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Pflanze hier gedüngt werden müsste. **(6 Punkte)**

e) In einem anderen Botanischen Garten, in Italien, wurde die Blüte der Titanwurz mehr als 4-mal so hoch wie die Blüte, die der Schüler in Deutschland beobachtet hat. In Abbildung 2 sind die Messungen für die italienische Blüte dargestellt.

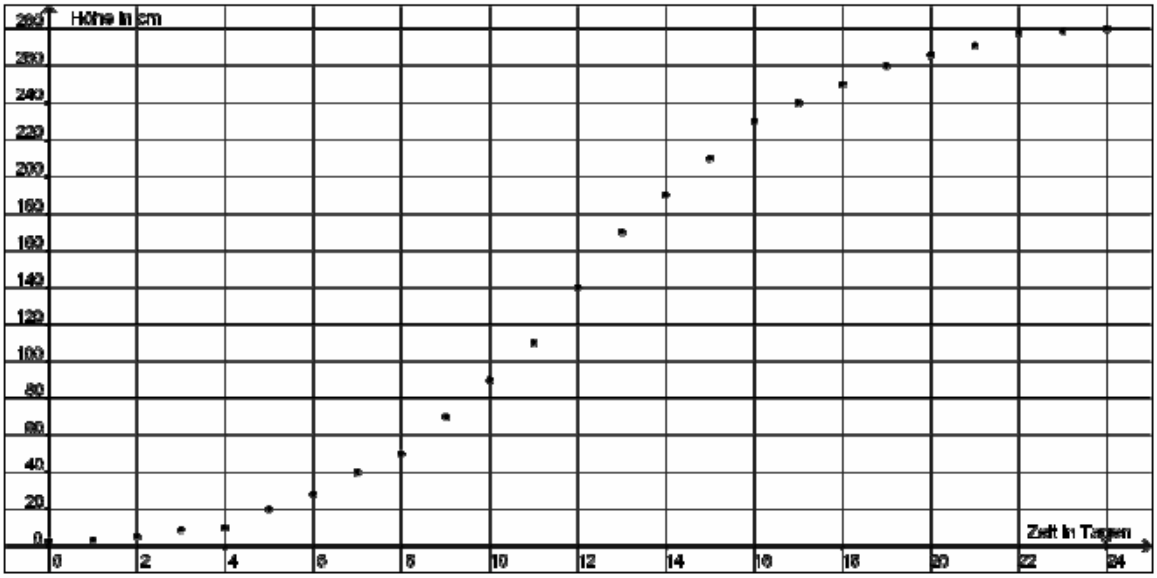


Abbildung 2

Der Schüler möchte auch hier eine ganzrationale Funktion f dritten Grades finden, die das Wachstum der Blüte aus Italien beschreibt. Dazu kann man sich auf der Grundlage der Abbildung 2 überlegen, welche Eigenschaften die gesuchte Funktion f haben soll. Diese Eigenschaften sollen in drei Gleichungen A bis C formuliert werden: Geben Sie für f, f ' und f ' ' geeignete Zahlen in den sechs Kästchen an. Begründen Sie für jede der drei Gleichungen Ihre Eintragungen.

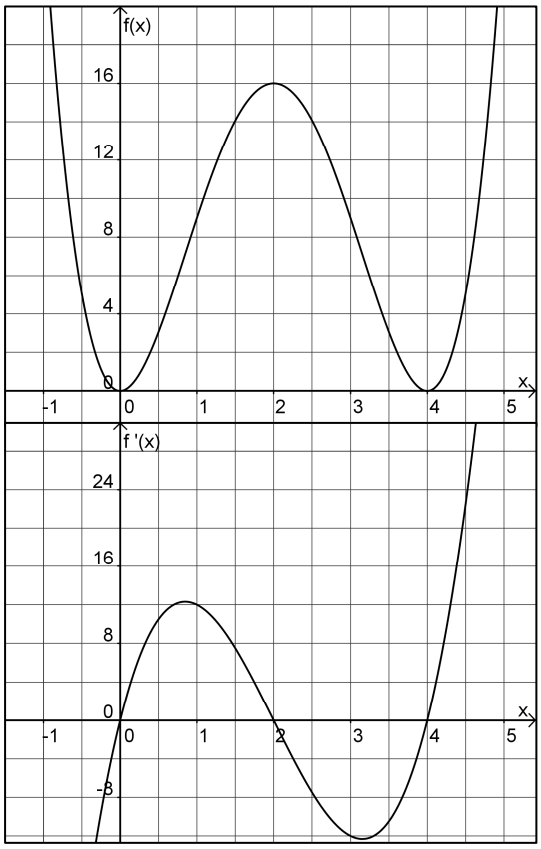
A	$f(\square) = \square$
B	$f'(\square) = \square$
C	$f''(\square) = \square$

(6 Punkte)

Vergleichsklausur 2009 für die Jahrgangsstufe 11

Aufgabe 1

Die folgenden Abbildungen zeigen den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2$ und den Graphen der Ableitungsfunktion f'.



37

a) *Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.*

b) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von f in $T_1(0\,|\,0)$ und $T_2(4\,|\,0)$ Tiefpunkte und in $H(2\,|\,16)$ einen Hochpunkt hat.*

c) *Leiten Sie aus dem Graphen der Ableitungsfunktion f' eine Aussage über die Anzahl der Wendestellen von f her und lesen Sie diese Stellen näherungsweise am Graphen ab.*

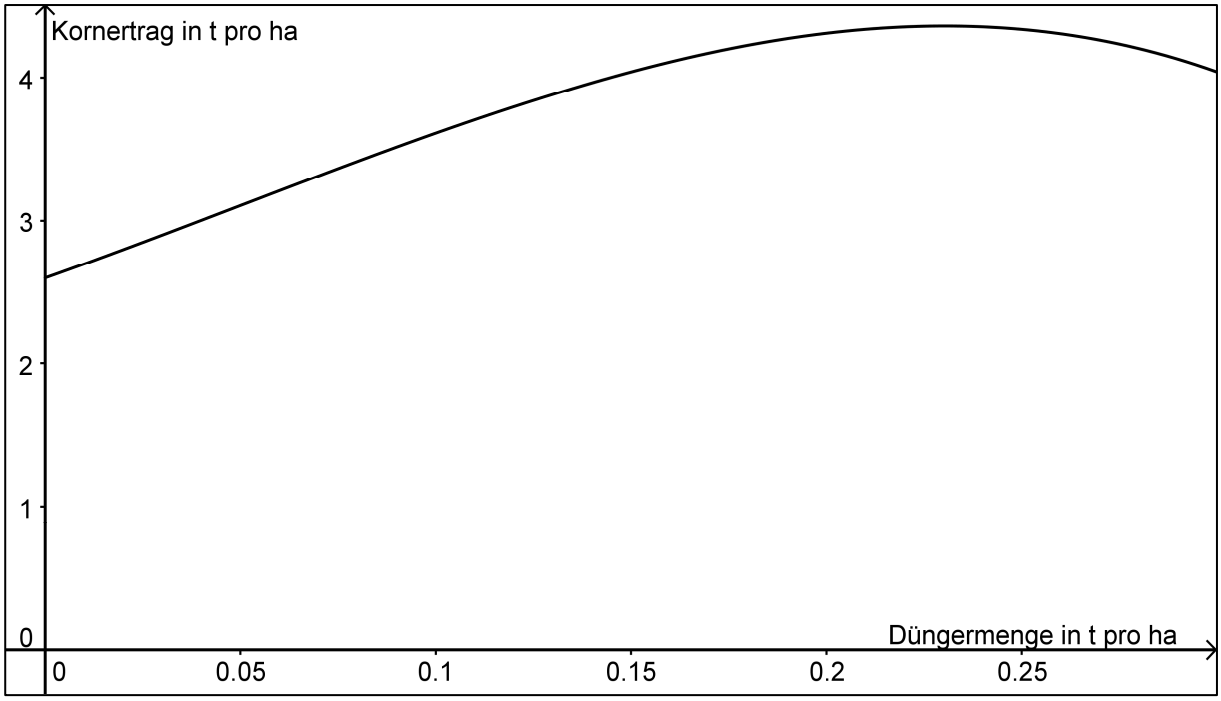
d) Betrachten Sie nun die Funktionen g_a mit $g_a(x) = x^2 \cdot (x^2 - 8x + a)$. Setzt man hier für a verschiedene Zahlen ein, so erhält man jedes Mal eine andere Funktionsgleichung.

d₁) *Bestimmen Sie die Zahl a so, dass die Funktion g_a mit der Funktion f übereinstimmt.*

d₂) *Ermitteln Sie a so, dass $x = 0$ eine Wendestelle des Graphen von g_a ist.*

Aufgabe 2

Wird Raps mit Stickstoff gedüngt, so nimmt der Kornertrag zunächst mit steigender Düngermenge zu. Wird die optimale Düngermenge überschritten, so wird der Ertrag wieder geringer. In dem folgenden Diagramm ist näherungsweise das Ergebnis von Versuchen dargestellt, die dazu in den Jahren 1998 bis 2005 in Hessen durchgeführt wurden.



38

Der abgebildete Graph gehört zur Funktion k mit

$$k(x) = -\tfrac{320}{3}x^3 + 16x^2 + \tfrac{48}{5}x + \tfrac{13}{5}.$$

Dabei bezeichnet x die Düngermenge in Tonnen pro Hektar und $k(x)$ den Kornertrag in Tonnen pro Hektar bei der Düngermenge x. Mit dieser Funktion ist es nun möglich, die folgenden Fragestellungen zu bearbeiten.

a) *Zeigen Sie rechnerisch, dass bei einer Düngermenge von annähernd 0,23 Tonnen pro Hektar der maximale Kornertrag erzielt wird.*

Berechnen Sie näherungsweise den maximalen Kornertrag pro Hektar.

b) *Berechnen Sie die Wendestelle der Funktion k und die Steigung an der Wendestelle.*

Interpretieren Sie die berechneten Werte im Sachzusammenhang.

c) *Entscheiden Sie begründet, ob die Funktion k auch außerhalb des in der Abbildung dargestellten Bereiches immer eine sinnvolle Beschreibung des Zusammenhangs von Düngermenge und Kornertrag liefert.*

d) Ein Landwirt erzielt pro Tonne Raps einen Verkaufspreis von 225 €, die Kosten pro Tonne Stickstoffdünger betragen 500 €.

Ermitteln Sie die Gleichung einer Funktion g, die den Gewinn pro Hektar in Abhängigkeit von der aufgebrachten Düngermenge pro Hektar beschreibt.

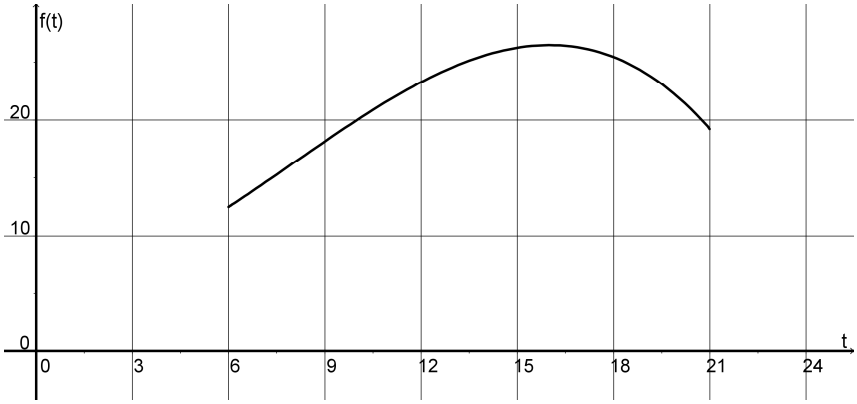
Weitere Betriebskosten sollen dabei unberücksichtigt bleiben.

Vergleichsklausur 2008 für die Jahrgangsstufe 11

Aufgabe 1

In modernen Wetterstationen werden rund um die Uhr Daten über die Lufttemperatur (kurz: Temperatur) durch elektronische Messautomaten erfasst.

Für $6 \le t \le 21$ stellt der Graph der Funktion f modellhaft den Temperaturverlauf während eines bestimmten Tages in der Zeit von 6.00 Uhr bis 21.00 Uhr dar (siehe Abbildung).



Es gilt:

$$f(t) = -0{,}01 \cdot t^3 + 0{,}24 \cdot t^2 + 6 \ ,$$

wobei t die Uhrzeit in Stunden angibt und $f(t)$ die Temperatur in °C.

a) Berechnen Sie die Temperatur zu Beginn und am Ende des vorgegebenen Zeitintervalls. 39

Berechnen Sie die Uhrzeit, zu der der Tageshöchstwert erreicht wird, und prüfen Sie, ob es sich um einen Sommertag handelt.

(Sommertag: Tag, an dem die Höchsttemperatur 25 °C übertrifft)

b) Der Wendepunkt W hat die Koordinaten $W\left(8 \middle| f(8)\right)$. Diese Information kann im Folgenden ohne Nachweis verwendet werden.

Berechnen Sie die Steigung der Wendetangente des Graphen von f. Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Sachzusammenhang.

c) Um 10 Uhr beträgt die Temperatur 20 °C.

Ermitteln Sie in der Abbildung auf diesem Arbeitsblatt zeichnerisch näherungsweise den Zeitraum, in dem die Temperatur mindestens 20 °C beträgt.

Bei der rechnerischen Ermittlung dieses Zeitraumes führt der Ansatz $f(t) = 20$ zur Gleichung

$$t^3 - 24 \cdot t^2 + 1400 = 0 \ .$$

Diese Gleichung muss nicht hergeleitet werden.

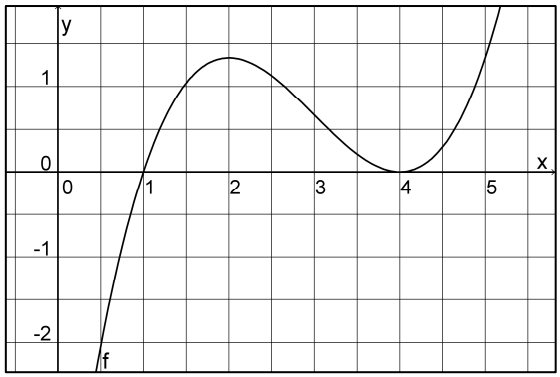
Berechnen Sie die exakten Lösungen dieser Gleichung und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.

Nur für den Dienstgebrauch!

Aufgabe 2

Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - \frac{16}{3} \ .$$



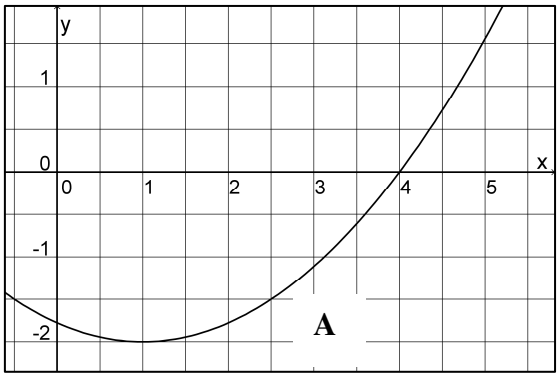
a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass $E_1\left(2 \mid \frac{4}{3}\right)$ und $E_2\left(4 \mid 0\right)$ Extrempunkte des Graphen von f sind.

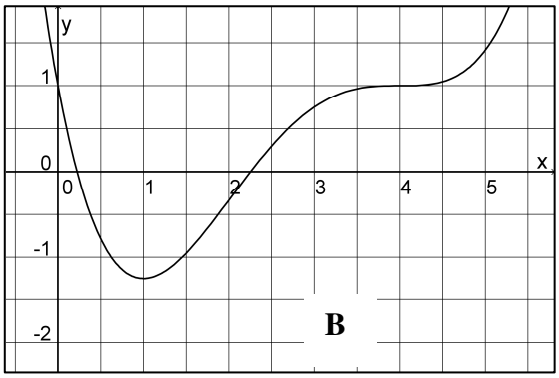
b) Berechnen Sie den Wendepunkt des Graphen.

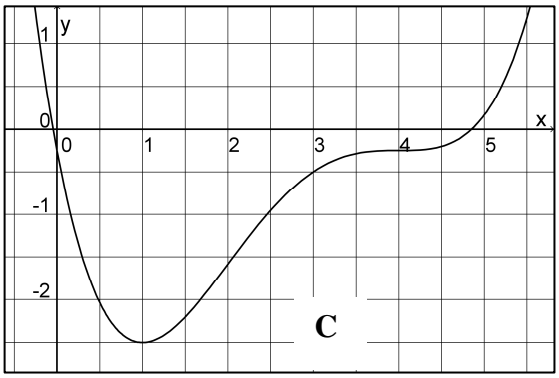
c) Die Funktion f ist die Ableitung einer Funktion F.

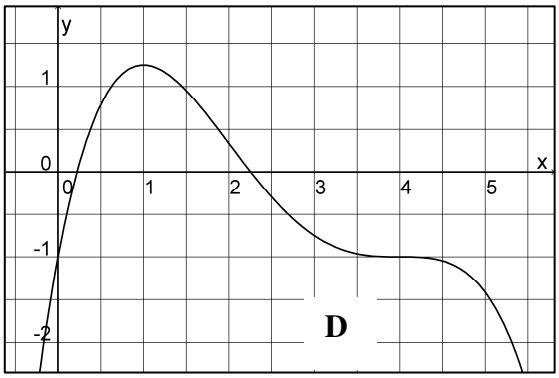
Entscheiden Sie, bei welchen der folgenden Graphen es sich <u>nicht</u> um den Graphen von F handeln kann. Begründen Sie in diesen Fällen, warum es sich nicht um den Graphen von F handeln kann. (Ein Gegenargument reicht jeweils aus.)

40









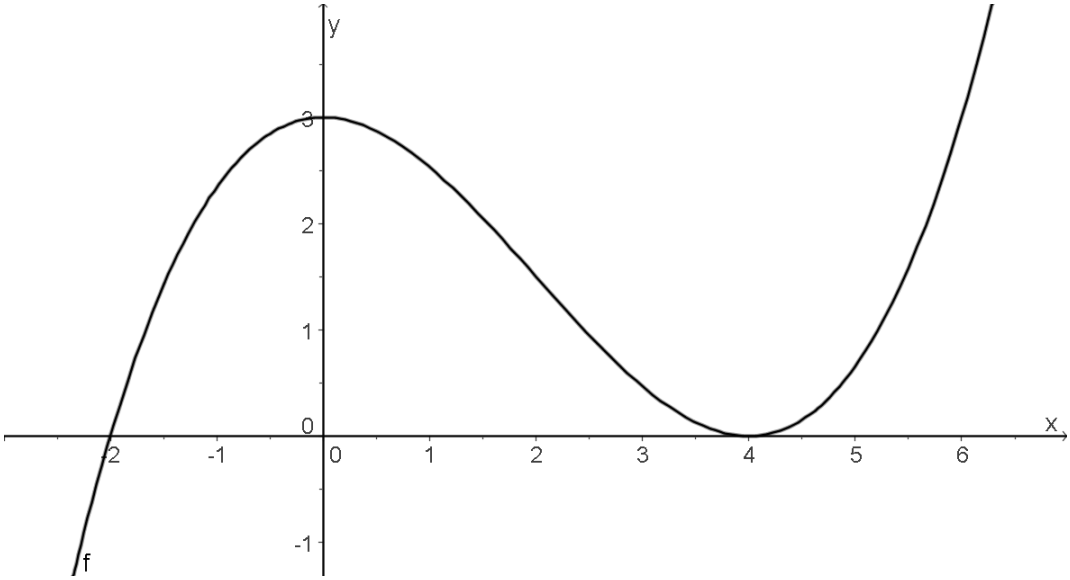
d) Weisen Sie nach, dass $t(x) = \frac{5}{4}x - \frac{16}{3}$ die Gleichung einer Tangente an den Graphen von f ist.

Vergleichsklausur 2006 für Jahrgangsstufe 11

1. Aufgabe

Die folgende Zeichnung zeigt den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{3}{32}x^3 - \frac{9}{16}x^2 + 3\,.$$



41

a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph in $(0|3)$ und $(4|0)$ Extrempunkte hat.

b) Berechnen Sie den Wendepunkt des Graphen.
Begründen Sie, dass jede ganzrationale Funktion dritten Grades genau einen Wendepunkt hat.

c) Die Tangente an den Graphen an der Stelle $x = 2$ schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

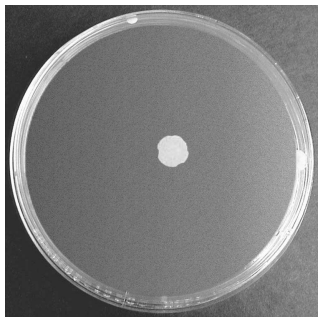
d) Zeichnen Sie die Gerade durch die beiden Extrempunkte in die obige Zeichnung ein.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass diese Gerade nicht mit der Wendetangente übereinstimmt.

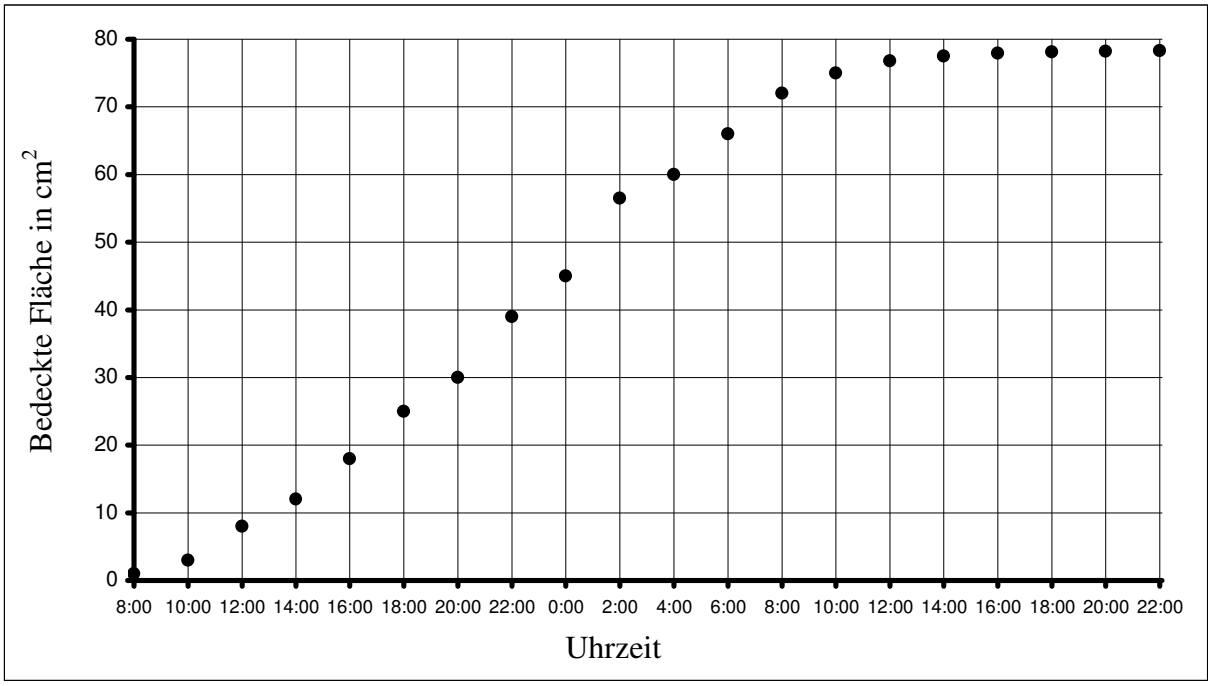
e) Der Graph schließt zwischen $x = 0$ und $x = 4$ mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein.
Ermitteln Sie die Größe dieser Fläche auf möglichst geschickte Weise.

Nur für den Dienstgebrauch!

2. Aufgabe

Ein Wissenschaftler hat im Rahmen einer Forschungsarbeit das Wachstum einer Bakterienkultur in einem Gefäß beobachtet. Alle zwei Stunden wurde von ihm die Größe der von den Bakterien bedeckten Fläche gemessen.
Seine Messwerte sind in folgendem Koordinatensystem dargestellt:





42

Der Wissenschaftler modelliert die Messreihe durch die folgende Funktion:

$$A(t) = -0{,}005\,t^3 + 0{,}2\,t^2 + 0{,}9\,t + 1$$

$A(t)$: Fläche (Einheit: cm^2)

t: Zeit seit dem Beobachtungsbeginn um 8.00 Uhr (Einheit: h)

Mit dieser Funktion ist es nun möglich, die Fragestellungen in den Aufgaben a) bis c) bearbeiten.

a) Berechnen Sie die Größe der um 5.00 Uhr nachts von Bakterien bedeckten Fläche.

b) Bestimmen Sie die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit der Bakterienkultur (in $\frac{cm^2}{h}$) zwischen dem Beobachtungsbeginn und 5.00 Uhr nachts.

c) Wann ist die Wachstumsgeschwindigkeit genauso groß wie zu Beginn der Beobachtung?
Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Bakterienkultur am schnellsten wächst.
Bis zu welchem Zeitpunkt wächst im vorgegebenen Modell die bedeckte Fläche?

d) Ein Kollege des Wissenschaftlers ist der Meinung, dass die zur Modellierung verwendete Funktion das Versuchsergebnis nicht angemessen beschreibt.
Geben Sie mindestens einen Grund für die Kritik des Kollegen an.

Nur für den Dienstgebrauch!

Vergleichsklausur 2005 für Klassenstufe 11

1. Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte und den Wendepunkt des Graphen von f. Skizzieren Sie den Graphen im Intervall von –1 bis 2.

b) Berechnen Sie die Gleichung der Normale im Wendepunkt.

c) Wir betrachten nun die Funktion w mit $w(x) = a \cdot f(x)$ mit $a > 1$. Wie verändern sich die Lage des Wendepunktes und der Verlauf der Wendetangente, wenn a wächst? Geben Sie eine Begründung an!

2. Aufgabe

In der Sportmedizin kennt man den Begriff der *anaeroben Schwelle*. Dieser Begriff lässt sich vereinfacht folgendermaßen erklären: 43

Die Energiebereitstellung für eine länger andauernde Bewegung bezeichnet man als *aerob*, wenn durch die Atmung so viel Sauerstoff aufgenommen wird, wie der Körper zur Bewegung benötigt. Steht – etwa bei einer intensiven Belastung – nicht genügend Sauerstoff zur Verfügung, so bildet der Körper zunehmend Laktat (Milchsäure) und die Bewegung wird immer schwerer. Die Energiegewinnung ohne Sauerstoff („anaerob“) spielt dann eine maßgebliche Rolle. Die Grenze zwischen diesen beiden Zuständen heißt *anaerobe Schwelle*.

Die anaerobe Schwelle kann dazu benutzt werden, den Trainingszustand eines Sportlers zu untersuchen. Ein gängiges Verfahren zur Bestimmung der anaeroben Schwelle nutzt die Laktatkonzentration im Blut. Bei der Untersuchung läuft der Sportler auf einem Laufband. Die Geschwindigkeit dieses Laufbandes wird in gleichen Zeitabständen gleichmäßig erhöht. Dabei wird immer wieder die Laktatkonzentration im Blut gemessen. Je höher die Geschwindigkeit ist, bei der der Sportler die anaerobe Schwelle erreicht, desto besser ist sein Trainingszustand.

Bei einem bestimmten Sportler A wird diese Untersuchung durchgeführt. Dabei ergibt sich aus den Messwerten näherungsweise die in Abbildung 1 gezeichnete Laktatkurve. Diese kann für $7 \le x \le 18$ durch folgende Gleichung dargestellt werden

$$f(x) = 0{,}03x^3 - 0{,}918x^2 + 9x - 25.$$

x bezeichnet dabei die Laufgeschwindigkeit in $\frac{km}{h}$, f(x) die Laktatkonzentration in Millimol pro Liter.

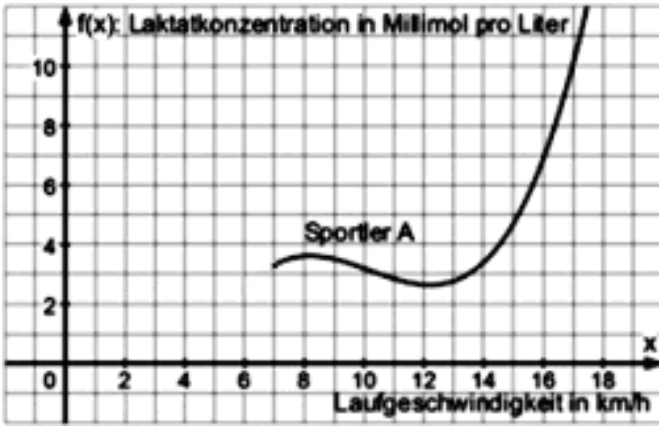


Abbildung 1

a) Berechnen Sie die Laktatkonzentration, die sich für Sportler A bei $16\frac{km}{h}$ ergibt!

b) Zur Berechnung der anaeroben Schwelle gibt es zwei unterschiedliche mathematische Modelle. Nach dem Mader-Modell (1976) wird die anaerobe Schwelle bei einer Laktatkonzentration von 4 Millimol pro Liter erreicht. Bestimmen Sie aus der Zeichnung einen Näherungswert für die Geschwindigkeit, bei der die anaerobe Schwelle überschritten wird.

c) Nach dem Modell des Sportmediziners G. Simon (1981) findet man die anaerobe Schwelle, indem man den Punkt der Kurve ermittelt, in dem die Steigung 1 ist. Bestimmen Sie rechnerisch die Geschwindigkeit für die anaerobe Schwelle nach dem Modell von Simon!

d) Bei der abgebildeten Laktatkurve fällt auf (s. Abbildung 1), dass die Laktatkonzentration in einem bestimmten Geschwindigkeitsbereich abnimmt. Berechnen Sie die Grenzen dieses Bereiches! 44

e) Bei welcher Laufgeschwindigkeit nimmt die Laktatkonzentration am stärksten ab?

f) Abbildung 2 zeigt die Laktatkurve eines Sportlers B, für den die Untersuchung wie für Sportler A durchgeführt wurde. Begründen Sie, welcher der beiden Sportler A und B den besseren Trainingszustand aufweist!

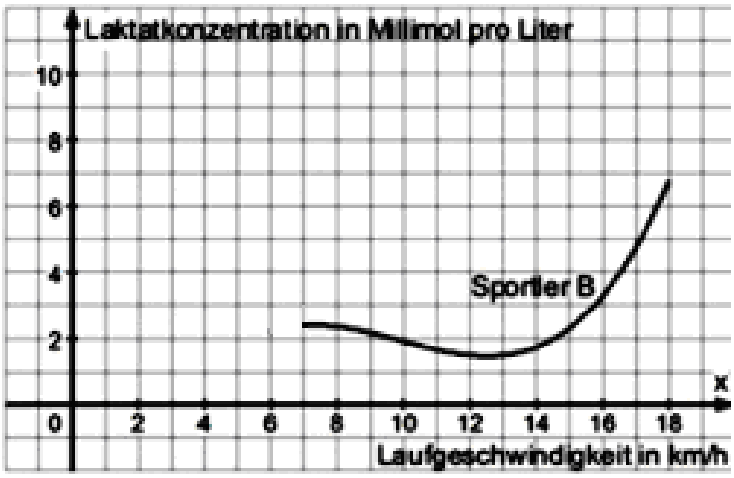


Abbildung 2

Nur für den Dienstgebrauch!

3. Aufgabe **Gruppe A**

Bei der folgenden Multiple-Choice-Aufgabe gilt:

- alle richtigen Angaben sind durch Ankreuzen ($\boxed{X}$) zu kennzeichnen
- es können bis zu vier Angaben pro Aufgabenteil richtig sein
- ein Aufgabenteil gilt nur dann als bearbeitet, wenn wenigstens eine Angabe durch Ankreuzen gekennzeichnet ist

a) Welche der folgenden Aussagen sind für **jede** ganzrationale Funktion 3. Grades zutreffend?

☐ Die Funktion hat eine Wendestelle.

☐ Die Funktion hat 3 Nullstellen.

☐ Die Funktion hat höchstens zwei Extremstellen.

☐ Die Funktion hat mindestens eine Nullstelle.

☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

b) Welche der folgenden Aussagen über ganzrationale Funktionen sind richtig? 45

☐ Wenn eine Funktion f an einer Stelle x_0 einen Tiefpunkt besitzt, dann gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$.

☐ Liegt in einem Punkt eines Graphen ein Übergang von einer Zunahme der Steigung zu einer Abnahme der Steigung vor, so handelt es sich um einen Wendepunkt.

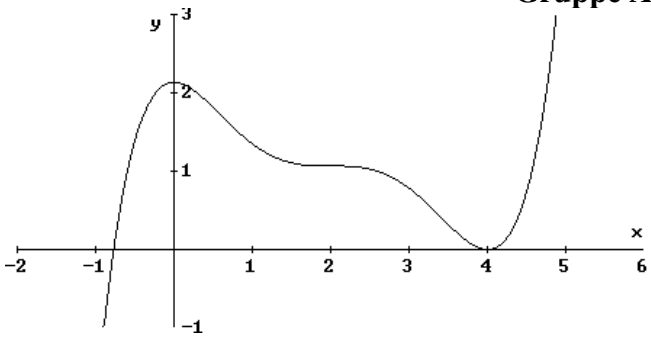
☐ Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann hat die Funktion f an der Stelle x_0 einen Tiefpunkt.

☐ Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, dann hat die Funktion f an der Stelle x_0 keinen Extrempunkt.

☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

Gruppe A

c) In der nebenstehenden Zeichnung sehen Sie den Graphen einer ganzrationalen Funktion *f*.
Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?



☐ f hat mindestens den Grad 5.

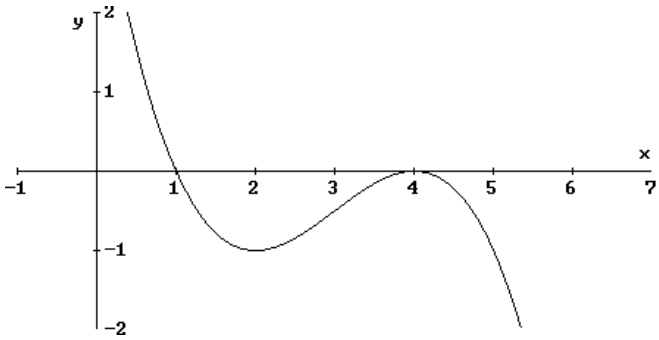
☐ Der Graph der Ableitungsfunktion f' hat an der Stelle 2 einen Extrempunkt.

☐ Die Ableitungsfunktion f' fällt im Bereich von 0 bis 4.

☐ Für $0 < x < 1$ gilt $f'(x) < 0$.

☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

d) In der nebenstehenden Zeichnung sehen Sie den Graphen einer Ableitungsfunktion f'.
Welche der folgenden Aussagen über die Ausgangsfunktion f sind zutreffend?



46

☐ Der Graph von f hat an der Stelle 1 einen Hochpunkt.

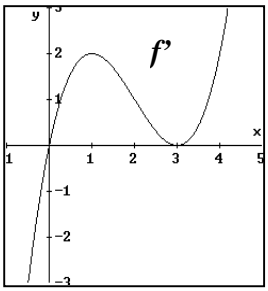
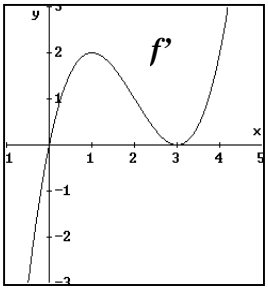
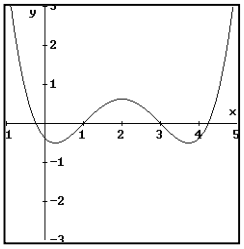
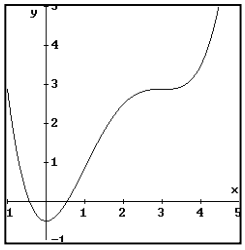
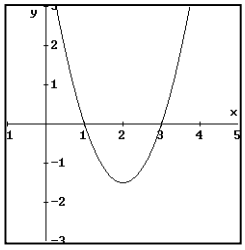
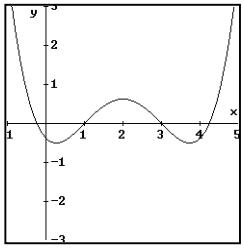
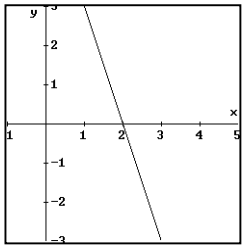
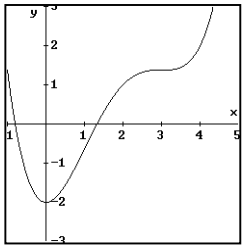
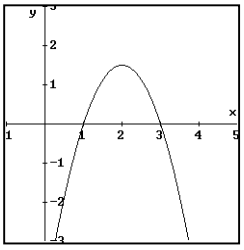
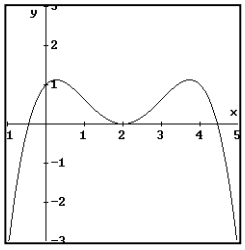
☐ Der Graph von f hat an der Stelle 4 einen Tiefpunkt.

☐ f hat im dargestellten Bereich zwei Wendestellen.

☐ Im Intervall von 1 bis 4 ist der Graph von f monoton steigend.

☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

e) **f)** **Gruppe A**

 Im Bild sehen Sie den Graph der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.	 Im Bild sehen Sie den Graph der Ableitungsfunktion f' zu einer Funktion f.
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Keiner der Graphen passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Keiner der Graphen passt zu einer Funktion f, deren Ableitung f' ist. ☐

47

3. Aufgabe **Gruppe B**

Bei der folgenden Multiple-Choice-Aufgabe gilt:

- alle richtigen Angaben sind durch Ankreuzen ($\boxed{X}$) zu kennzeichnen
- es können bis zu vier Angaben pro Aufgabenteil richtig sein
- ein Aufgabenteil gilt nur dann als bearbeitet, wenn wenigstens eine Angabe durch Ankreuzen gekennzeichnet ist

a) Welche der folgenden Aussagen sind für **jede** ganzrationale Funktion 3. Grades zutreffend?

☐ Die Funktion hat 3 Nullstellen.

☐ Die Funktion hat höchstens zwei Extremstellen.

☐ Die Funktion hat eine Wendestelle.

☐ Die Funktion hat mindestens eine Nullstelle.

☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

48

b) Welche der folgenden Aussagen über ganzrationale Funktionen sind richtig?

☐ Liegt in einem Punkt eines Graphen ein Übergang von einer Zunahme der Steigung zu einer Abnahme der Steigung vor, so handelt es sich um einen Wendepunkt.

☐ Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann hat die Funktion f an der Stelle x_0 einen Tiefpunkt.

☐ Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, dann hat die Funktion f an der Stelle x_0 keinen Extrempunkt.

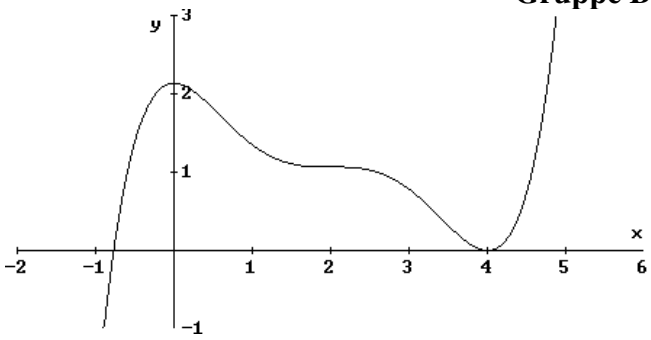
☐ Wenn eine Funktion f an einer Stelle x_0 einen Tiefpunkt besitzt, dann gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$.

☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

Nur für den Dienstgebrauch!

Gruppe B

c) In der nebenstehenden Zeichnung sehen Sie den Graphen einer ganzrationalen Funktion *f*.
Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?



☐ Der Graph der Ableitungsfunktion f' hat an der Stelle 2 einen Extrempunkt.

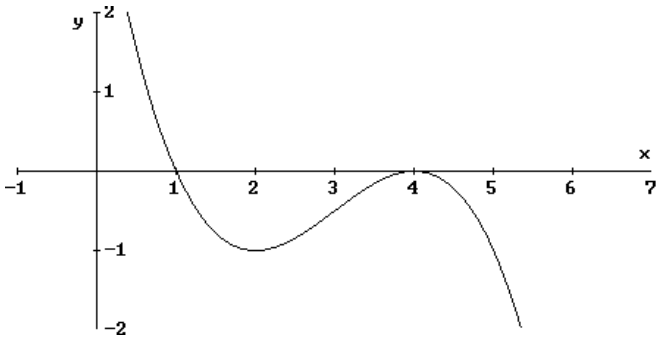
☐ Die Ableitungsfunktion f' fällt im Bereich von 0 bis 4.

☐ Für $0 < x < 1$ gilt $f'(x) < 0$.

☐ f hat mindestens den Grad 5.

☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

d) In der nebenstehenden Zeichnung sehen Sie den Graphen einer Ableitungsfunktion f'.
Welche der folgenden Aussagen über die Ausgangsfunktion f sind zutreffend?



49

☐ Der Graph von f hat an der Stelle 4 einen Tiefpunkt.

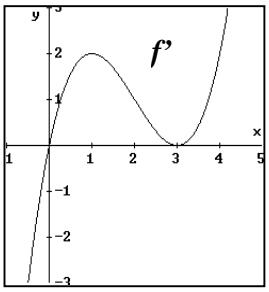
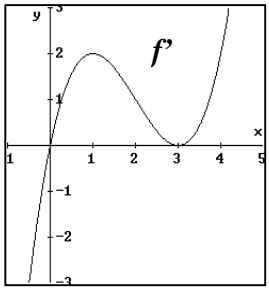
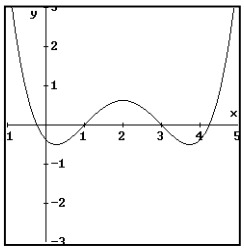
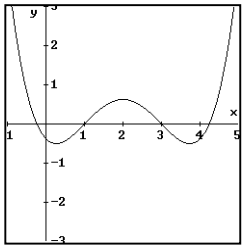
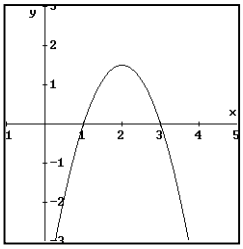
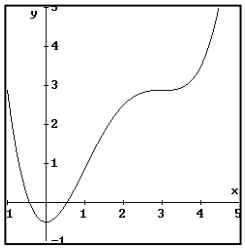
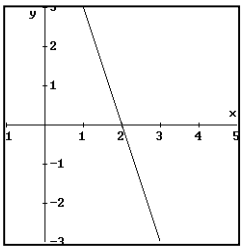
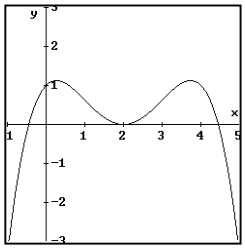
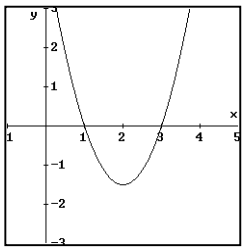
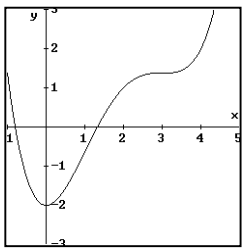
☐ Der Graph von f hat an der Stelle 1 einen Hochpunkt.

☐ Im Intervall von 1 bis 4 ist der Graph von f monoton steigend.

☐ f hat im dargestellten Bereich zwei Wendestellen.

☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

e) **f)** **Gruppe B**

 Im Bild sehen Sie den Graph der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.	 Im Bild sehen Sie den Graph der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Keiner der Graphen passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Keiner der Graphen passt zu einer Funktion f, deren Ableitung f' ist. ☐

50

Vergleichsklausur 2004

1. Aufgabe

Gegeben ist f mit $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x + t$, wobei t>0 ist.

a) Wie muss t gewählt werden, damit $x_0 = -2$ eine Nullstelle der Funktion f ist. Berechnen Sie die weiteren Nullstellen der gefundenen Funktion und zerlegen Sie den Term in Linearfaktoren!

b) Ermitteln Sie die lokalen Extremstellen der in a) berechneten Funktion und skizzieren Sie anhand der ermittelten Ergebnisse anschließend den Graphen von f und die Tangente sowie die Normale im Wendepunkt W(0/4)!

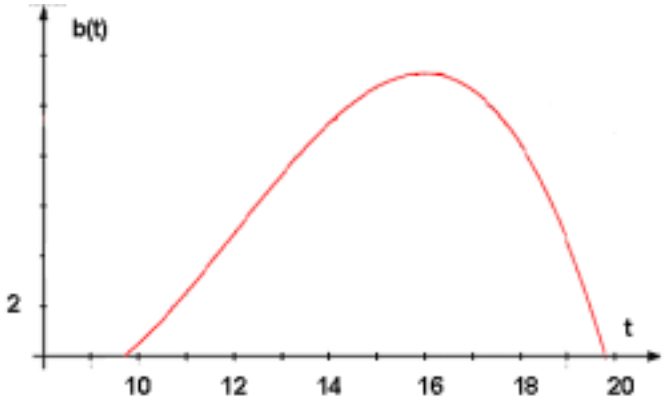
c) Die Tangente und die Normale im Wendepunkt W(0/t) bilden für **beliebiges t>0** mit der x-Achse ein Dreieck. Für welches t ist der Flächeninhalt des Dreiecks 15 Flächeneinheiten groß?

2. Aufgabe

Nebenstehende Graphik gibt vereinfacht die Anzahl b der Besucher (gemessen in tausend Personen) in einem Freizeitpark von 10.00 Uhr bis 19.30 Uhr an. Der Funktionsterm dazu lautet:

$b(t) = -0{,}05t^3 + 1{,}8t^2 - 19{,}2t + 62{,}5$

für $10 < t \leq 19{,}5$.



a) Berechnen Sie die Zahl der Besucher, die an einem Tag eine Stunde nach Öffnung im Park sind!

b) Wann ist die Zahl der Besucher maximal? Wie viele sind es?

c) Wann ist der Andrang an den Kassen am größten? Begründen Sie im Sachzusammenhang!

d) Erfahrungsgemäß ist an den Imbissstuben im Park mit erhöhtem Andrang zu rechnen, wenn mindestens 9500 Besucher im Park sind. Für den Direktor besteht dann die Notwendigkeit, zusätzliches Personal bereit zu stellen. Der Zeitraum, für den dies erforderlich ist, soll näherungsweise, z.B. zeichnerisch ermittelt werden.

Vergleichsklausur 2003 in der Jahrgangsstufe 11

Aufgabe 1

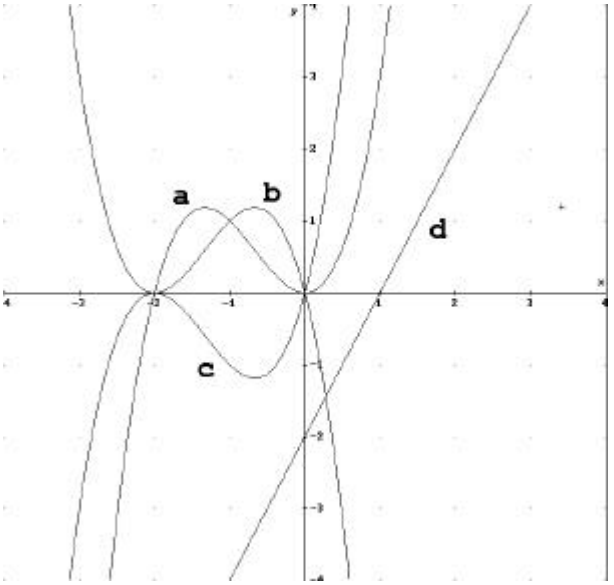
Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 3 .$$

a) Berechnen Sie die Extremstellen und die Wendestelle der Funktion f.
(Hinweis: Die y-Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte sind nicht zu berechnen.)

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $P_0(0;?)$.

c) Wo schneidet die Tangente den Graphen ein zweites Mal?



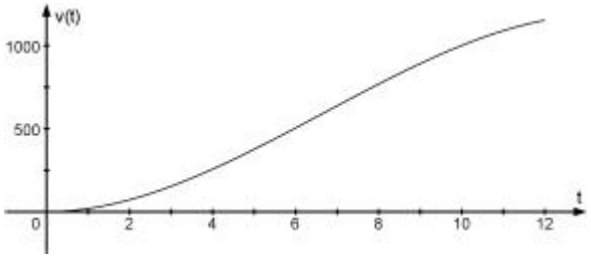
Aufgabe 2

In dem nebenstehenden Bild sind mehrere Graphen abgebildet. Welcher Graph gehört zur Funktion f mit $f(x) = x(x+2)^2$? Kurze Begründung!

Aufgabe 3

Pflanzen produzieren bei der Fotosynthese Sauerstoff, den sie an ihre Umgebung abgeben. Wir betrachten nun diesen Vorgang für einen bestimmten Baum an einem bestimmten Tag zwischen 6 Uhr morgens (Sonnenaufgang) und 18 Uhr abends (Sonnenuntergang). Messungen ergaben für diesen Baum den abgebildeten Graphen.

52



Hierbei gibt t an, wie viel Stunden seit dem Sonnenaufgang um 6 Uhr vergangen sind.
$v(t)$ gibt an, wie viel Liter Sauerstoff der Baum bis zum Zeitpunkt t insgesamt produziert hat.

Der Graph kann näherungsweise beschrieben werden durch

$$v(t) = -t^3 + 20t^2 \quad \text{mit } 0 \le t \le 12 .$$

a) Zeigen Sie, dass der Baum bis 13 Uhr insgesamt 637 Liter Sauerstoff produziert hat.
Wie viel Sauerstoff gibt der Baum zwischen 13 Uhr und 17 Uhr durchschnittlich pro Stunde ab?

b) Um wie viel Prozent ist die Produktion zwischen 15 Uhr und 17 Uhr niedriger als zwischen 13 Uhr und 15 Uhr? (Runden Sie das Endergebnis auf eine Dezimale.)

c) Bestimmen Sie die Steigung von v an der Stelle $t = 5$, und erläutern Sie die Bedeutung dieses Wertes in dem gegebenen Sachzusammenhang.

d) Wann produziert der Baum am meisten Sauerstoff? Geben Sie zunächst eine begründete Vermutung. Erläutern Sie anschließend, wie man diesen Zeitpunkt rechnerisch ermitteln kann.

Nur für den Dienstgebrauch!

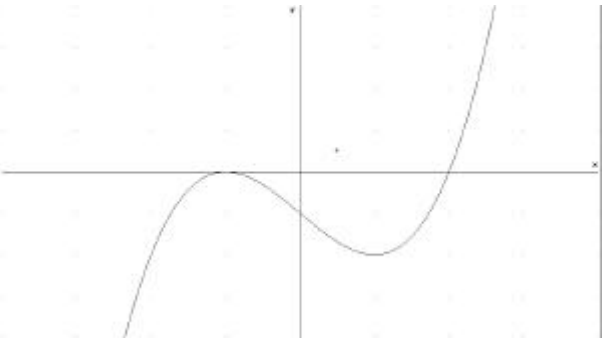
Vergleichsklausur 2002

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit dem Funktionsterm

$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x - 2$

und dem nebenstehenden Graphen.



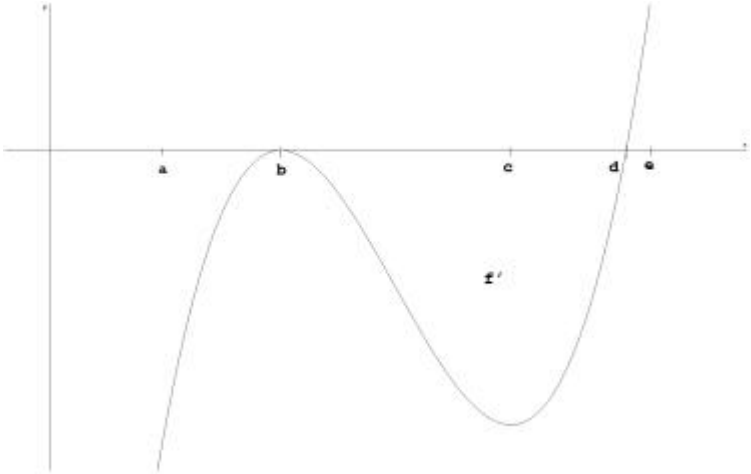
a) Bestimmen Sie die Nullstellen und die lokalen Extremstellen der Funktion f.

b) Welche Gleichung hat die Tangente im Wendepunkt W. Zeigen Sie, dass die Normale in W die Gleichung $y = \frac{2}{3}x - 2$ hat.

c) Wie lautet die Gleichung des Kreises mit dem Radius $r = \sqrt{52}$, dessen Mittelpunkt auf der Normalen liegt und der die Tangente in W berührt?

Aufgabe 2

f sei eine ganzrationale Funktion über dem Intervall $[a, e]$. Der Graph der Ableitungsfunktion f' ist in der folgenden Zeichnung gegeben: 53



a) Machen Sie eine begründete Aussage über den Grad der Ableitungsfunktion f'.

b) In welchen Intervallen steigt der Graph von f, in welchen fällt er (Begründung!)?

c) Welches Verhalten zeigt der Graph von f an den Stellen b, c und d (Begründung!)?

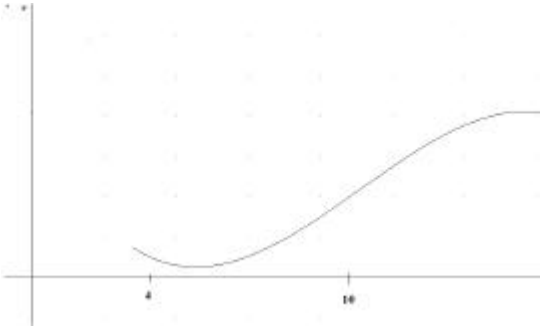
d) Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen von f.

e) Machen Sie eine begründete Aussage über die mögliche Anzahl der Nullstellen von f im Intervall [a,e].

Nur für den Dienstgebrauch!

Aufgabe 3

Ein Industrieunternehmen lässt ständig beobachten, wie viele Surfer gerade die Internetseiten des Unternehmens besuchen. Die nebenstehende Kurve zeigt den durchschnittlichen Besuch der Internetseiten im Zeitraum von 4h morgens bis 16h nachmittags. Die Anzahl der Surfer, die zu einem bestimmten Zeitpunkt gerade die Internetseiten besuchen, lässt sich näherungsweise durch den folgenden Funktionsterm beschreiben:



$$f(x) = -x^3 + 30x^2 - 225x + 520.$$

Dabei gibt zum Beispiel $f(8)$ an, wie viele Surfer um 8h auf den Internetseiten der Firma sind.

a) Berechnen Sie $f'(9)$ und erläutern Sie die Bedeutung von $f'(9)$ in der vorgegebenen Situation.

b) Von besonderem Interesse ist die Höchstzahl von Surfern, die an e inem bestimmten Tag zu einem bestimmten Zeitpunkt zwischen 4h und 16h gleichzeitig die Internetseiten des Unternehmens besuchen. Wie hoch ist dieser Spitzenwert gemäß f(x)?
(Zur Kontrolle: 520 Surfer)

c) Am 31.Mai ergab sich ein Spitzenwert von 805 Surfern, d ie gleichzeitig die Seiten des Unternehmens besuchten. Um wie viel Prozent lag dieser Wert über dem zu erwartenden Spitzenwert von b)? 54

d) An einem bestimmten Tag sind abweichend von f(9) um 9h bereits 240 Besucher auf den Internetseiten, weil sich in der Zwis chenzeit die Anzahl derer erhöht hat, die einen Internetanschluss haben. Mit wie vielen Besuchern würden Sie dann an diesem Tag um 10h rechnen? Geben Sie eine oder auch mehrere rechnerisch begründete Prognosen an.

Vergleichsarbeit Analysis Stufe 11 im Jahr 2001

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 1$.

a. Ermitteln Sie die erste, zweite und dritte Ableitung von f.

b. Berechnen Sie die durchschnittliche Steigung von f im Intervall [0; 2].

c. Welche Steigung hat der Graph von f an der Stelle x = 1 ?

d. Stellen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x = 1 auf.

e. In welchem Punkt hat der Graph von f die Steigung - 3 ?

f. Berechnen Sie mit dem Differenzenquotienten die Ableitung von f an der Stelle x = 2.

Aufgabe 2:

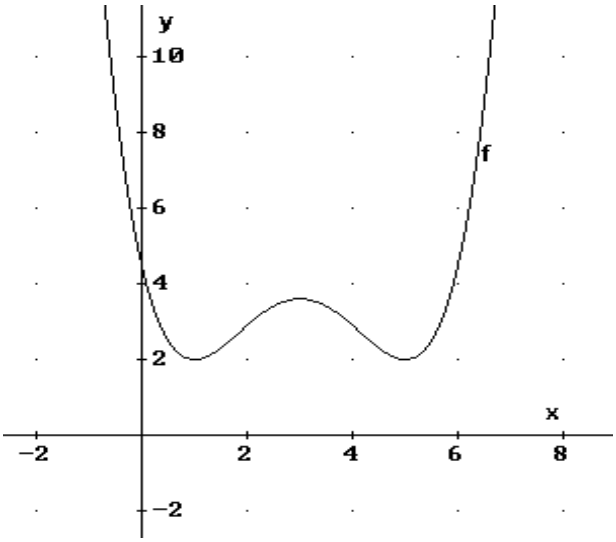


Bild 1

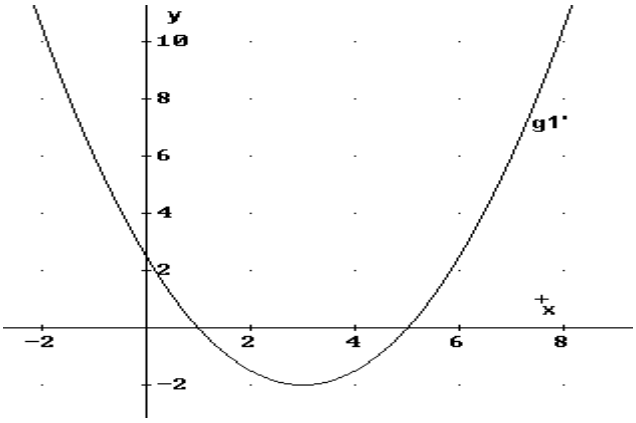


Bild 2

Gegeben ist der Graph der ganzrationalen Funktion **f** gemäß *Bild 1*.

a. In *Bild 2* und *Bild 3* sind die Graphen von Ableitungsfunktionen $\mathbf{g'_1}$ und $\mathbf{g'_2}$ dargestellt. Begründen Sie, warum keine der beiden Funktionen als Ableitung von **f** in Frage kommen kann.

b. Markieren Sie auf dem Graphen von **f** in *Bild 1* die Anteile in einer anderen Farbe, für die **f '(x)>0** gilt. Skizzieren Sie dann den Graphen von **f '(x)**.

c. Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion $\mathbf{g_1}$, die als Ableitung die Funktion $\mathbf{g'_1}$ aus *Bild 2* hat.

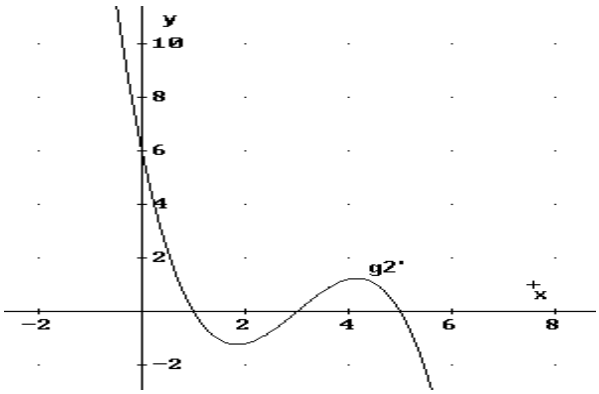
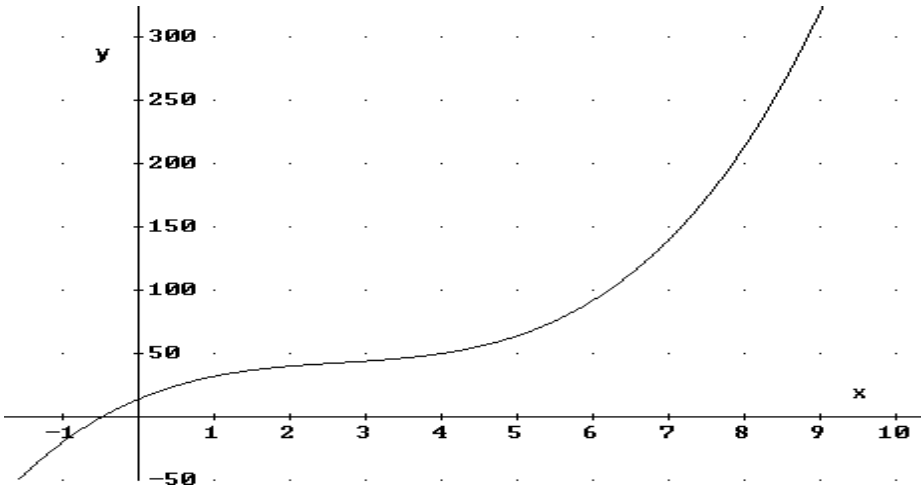


Bild 3

Aufgabe 3:

Gegeben sind die Funktionen **f(x)**= $x^3 - 8x^2 + 25x + 14$ und **g(x)** = 20x.

Der Graph von **f** ist unten abgebildet.



a. Weisen Sie rechnerisch nach, dass **f** keine lokalen Extremstellen hat.
Berechnen Sie die Wendestelle von **f**.

b. Tragen Sie den Graphen von **g** in die Zeichnung ein und berechnen Sie die Schnittstellen von **f** und **g**.

56

c. Berechnen Sie die lokalen Extremstellen der Differenzfunktion
d(x) = **g**(x) - **f**(x) = $- x^3 + 8x^2 - 5x - 14$.

d. Skizzieren Sie mit Hilfe der bisher gewonnenen Ergebnisse den Graphen der Differenzfunktion **d**. Benutzen Sie dazu die obige Zeichnung.

Im Rahmen wirtschaftlicher Untersuchungen kann die Funktion **f** für $x \geq 0$ die "Kostenfunktion" eines Unternehmens modellieren. Dabei werden die anfallenden Kosten (**f**(x) Geldeinheiten) in Abhängigkeit vom produzierten Gut (x Produktionseinheiten) beschrieben. Wird eine Produktionseinheit für 20 Geldeinheiten verkauft, so stellt **g** die "Erlösfunktion" dar.

e. In welchem Bereich muss die Anzahl x der Produktionseinheiten liegen, damit das Unternehmen keinen Verlust macht?
Was bedeuten die Ergebnisse von Aufgabenteil c) in diesem Sachzusammenhang?
Welche Bedeutung hat hier **f**(0)?

Vergleichsarbeit Analysis Stufe 11 im Jahr 2000

Aufgabe 1:

Eine Parabel hat eine Gleichung der Form $f(x) = ax^2 + bx$.

a. In A(3;3) hat sie die Steigung -2. Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel.
[Zur Kontrolle: $f(x) = -x^2 + 4x$]

b. Ermitteln Sie für $x_0 = 1$ die Gleichung der Tangente an die Parabel. Wie groß ist der Winkel, den die Tangente mit der positiven Richtung der x-Achse bildet?

c. Stellen Sie die Gleichung der Normalen zur Tangente durch $B(1; y_0)$ auf. Zeichnen Sie die Parabel, die Tangente und die Normale in dasselbe Koordinatensystem. Wählen Sie als Einheit auf beiden Achsen jeweils 1 cm.

d. Von einer Funktion g sei bekannt, dass für alle x die Beziehung $g`(x) = f(x)$ gilt.

Untersuchen Sie den Graphen von g auf Wendestellen.

Aufgabe 2:

Das Bild auf der folgenden Seite zeigt den Graphen einer ganz-rationalen Funktion h.

a. Skizzieren Sie einen möglichen Graphen der Ableitung von h. Benutzen Sie dazu das Koordinatensystem, in welchem der Graph von h bereits eingetragen ist.

b. Die Funktion f mit $f(x) = -2x^3 + 24x^2$ besitzt einen vergleichbaren Graphen wie h. Zwischen ihren Nullstellen beschreibt die Funktion f die Wassermenge in einem Pumpspeicherwerk. Bestimmen Sie diesen Bereich. Dabei geben die y-Werte die Wassermenge in m^3, die x-Werte ($x \geq 0$) die Zeit in Stunden an.

c. Wann wird nach dem Zeitpunkt x=0 die maximale Wassermenge erreicht, wie groß ist dieser maximale Wasserbestand?

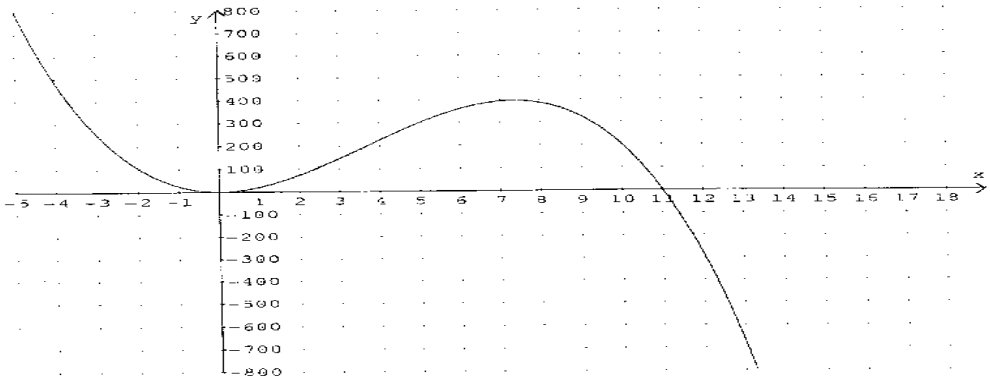
d. Was bedeuten im Zusammenhang mit dem in Aufgabenteil b) beschriebenen Sachverhalt die Begriffe mittlere Änderungsrate der Funktion f und lokale Änderungsrate der Funktion f?

e. Bestimmen Sie den Wendepunkt des Graphen von f.

f. Welche Bedeutung hat die Wendestelle von f im Zusammenhang mit dem in Aufgabenteil b) beschriebenen Sachverhalt?

57

Skizze zu Aufgabe 2:



Nur für den Dienstgebrauch!