

Vergleichsklausuren NRW

Vorwort	1
Konkretisierung der fachlichen Rahmenbedingungen 2019	2
Klausur 2018: Wasserstand des Rheins	3
Klausur 2017: Durchschnittsalter einer Bevölkerung im Land A	10
Klausur 2016: Sonnenhöhenwinkel	17
Klausur 2015: Wassermenge im Speicher eines Turmes	24

1

Vorwort

Die zentralen Vergleichsklausuren sind in einer Zusammenfassung bis zum Jahr 2000 gesammelt und unter walther-mathematik.de in einem Reader zusammengefasst. Seit 2015 gibt es hilfsmittelfreie Aufgabenteile in den Klausuren. Deshalb beginnt diese Zusammenfassung im Jahr 2015, weil Klausuren aus den Vorjahren nicht mehr die optimale Vorbereitung bieten.

Viel Erfolg bei den Vorbereitungen wünscht

Michael Walther

Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen



Konkretisierung der fachlichen Rahmenbedingungen für die Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2019 Mathematik

Curriculare Grundlage

Aktueller Kernlehrplan (KLP) für die Sekundarstufe II Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen

Aufgaben

Die Klausur umfasst zwei Teile. Eine Aufgabenauswahl ist nicht vorgesehen. In Teil B werden für die Bearbeitung mit GTR bzw. CAS die gleichen Aufgaben gestellt.

Aufgabenteil	Aufgabentyp	Aufgaben	Dauer
Teil A	Aufgaben ohne Hilfsmittel (ohne Taschenrechner, ohne Formelsammlung)	Aufgabe 1 Aufgabe 2	max. 20 Minuten
Teil B	Aufgaben mit Hilfsmitteln (für GTR oder CAS)	Aufgabe 3 Aufgabe 4	min. 80 Minuten
		4	100 Minuten

Die Bewertungseinheiten entsprechen den Zeitanteilen.

Organisation

Zu Beginn der Klausur wird Teil A (Aufgaben ohne Hilfsmittel) bearbeitet; die Zeit beträgt maximal 20 Minuten. Wenn die Schülerin oder der Schüler die Aufgaben und die Lösungen abgegeben hat, werden ihr oder ihm die Aufgaben von Teil B sowie die dafür zugelassenen Hilfsmittel (GTR oder CAS; Formelsammlung) ausgehändigt.

Die Gesamtbearbeitungszeit für beide Teile beträgt zusammen 100 Minuten. Für Schülerinnen oder Schüler, die die Aufgaben und die Lösungen von Teil A vorzeitig abgeben, verlängert sich entsprechend die Bearbeitungszeit für Teil B.

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist in beiden Teilen der Klausur zugelassen.

Teil A – Aufgaben ohne Hilfsmittel

Bezug zu den Inhaltsfeldern und inhaltlichen Schwerpunkten des KLP*

Inhaltsfeld Funktionen und Analysis (A)	Inhaltsfeld Stochastik (S)
Grundlegende Eigenschaften von Potenz-, Exponential- und Sinusfunktionen	Mehrstufige Zufallsexperimente
Grundverständnis des Ableitungsbegriffs	Bedingte Wahrscheinlichkeiten
Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen Untersuchung ganzrationaler Funktionen bis zum Grad drei	

^{*} Die Verbindlichkeit des Kernlehrplans bleibt von diesen Schwerpunktsetzungen und Konkretisierungen für die Zentrale Klausur unberührt.

Teil B – innermathematische und kontextbezogene Aufgaben mit Hilfsmitteln

Bezug zu den Inhaltsfeldern und inhaltlichen Schwerpunkten des KLP*

Inhaltsfeld Funktionen und Analysis (A)
Grundverständnis des Ableitungsbegriffs
Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen

^{*} Die Verbindlichkeit des Kernlehrplans bleibt von diesen Schwerpunktsetzungen und Konkretisierungen für die Zentrale Klausur unberührt.



Name: _____

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2018

Mathematik

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

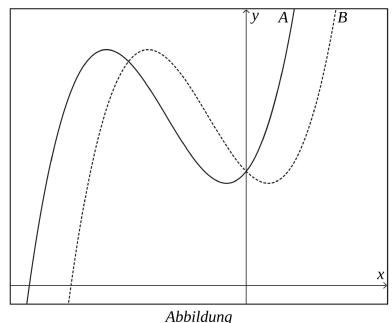
$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3 + x^2 - x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Berechnen Sie f'(2). (3 Punkte)

b) In der Abbildung sind zwei Graphen A und B abgebildet, einer davon ist der Graph der Funktion f.

Für die Ableitung der Funktion f an der Stelle 0 gilt: f'(0) = -1.

Entscheiden Sie mit Hilfe dieser Eigenschaft begründet, welcher der beiden Graphen der Graph von f ist.



(3 Punkte)

Name: _			
Aufga	be 2:		

In einem Land sind 20 % der Bevölkerung mindestens 65 Jahre alt. Diese Personen werden im Folgenden Senioren genannt. 10 % der Bevölkerung des Landes sind Senioren, die das Internet nutzen. Insgesamt sind 85 % der Bevölkerung des Landes Internetnutzer.

a) Stellen Sie den oben beschriebenen Sachverhalt dar, indem Sie alle Prozentsätze in der folgenden Tabelle angeben.

	Nicht-Senioren	Senioren	Summe
Nutzer			
Nicht-Nutzer			
Summe			100 %

Tabelle

(4 Punkte)

b) Eine Person nutzt das Internet.

Stellen Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit auf, dass die Person ein Senior ist.

[Eine Berechnung der Wahrscheinlichkeit ist nicht erforderlich.]

(2 Punkte)

Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

Name:		
ivallie.		

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2018

5

Mathematik

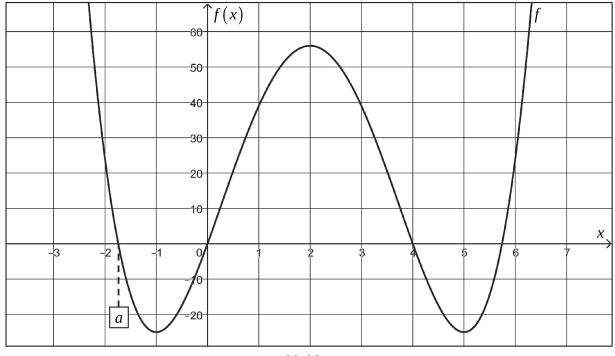
Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = x^4 - 8 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 + 40 \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}$$
.

Der Graph der Funktion *f* ist in der folgenden *Abbildung* dargestellt.



Abbildung

a) Ermitteln Sie die in der Abbildung markierte Nullstelle a auf zwei Nachkommastellen genau.

(2 Punkte)

Name: _



ZK M HT Prüfungsteil B Seite 2 von 5

b)) Weisen Sie rechnerisch nach, dass $x = 2$ eine lokale Maximalstelle der Funktion f	ist.
		5 Punkte)

- c) (1) Zeichnen Sie die Sekante s_1 durch die Punkte $H_1(2|56)$ und $P_1(4|0)$ des Graphen von f in die Abbildung ein und berechnen Sie die Steigung von s_1 .
 - (2) Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P_1(4|0)$.

[Zur Kontrolle: Die Steigung von t ist $m_t = -40$.]

- (3) Zeichnen Sie die Tangente t in die Abbildung ein.
- (4) Die Steigung einer Sekante s_2 durch den Punkt $P_1(4|0)$ und einen weiteren Punkt P_2 des Graphen von f soll sich um weniger als 0,1 von der Steigung der Tangente t unterscheiden.

Ermitteln Sie durch systematisches Probieren die Koordinaten eines Punktes P_2 so, dass diese Bedingung erfüllt ist.

(3 + 4 + 2 + 3 Punkte)

- d) Der Graph der Funktion f wird nacheinander folgenden Transformationen unterzogen:
 - Der Graph wird in Richtung der *y*-Achse so gestaucht, dass der gestauchte Graph den lokalen Hochpunkt $H_2(2|28)$ besitzt.
 - Im Anschluss wird der gestauchte Graph um drei Einheiten nach rechts verschoben.

Die Funktion, die zum so veränderten Graphen gehört, wird mit *g* bezeichnet.

Geben Sie eine Gleichung von g an.

[Hinweis: Eine Vereinfachung der Gleichung von *g* ist nicht erforderlich.]

(4 Punkte)

Name:			

Aufgabe 4:

Aufgrund ergiebiger Regenfälle wurde in der zweiten Oktoberhälfte 2016 am Rhein ein Ansteigen des Wassers beobachtet.

Am 20.10.2016 um 0:00 Uhr wurde an der Messstelle in Bonn ein Wasserstand¹ von 130 cm gemessen. Das Wasser begann dann zu steigen und nach einiger Zeit zunächst wieder zu sinken.

Eine Schülerin verwendet die auf $I\!R$ definierte Funktion h mit der Funktionsgleichung

$$h(t) = -\frac{80}{27} \cdot t^3 + \frac{40}{3} \cdot t^2 + 130$$



Abbildung 1

für $0 \le t \le 3,5$, um den Wasserstand des Rheins an der Messstelle in Bonn im Zeitraum vom 20.10.2016, 0:00 Uhr, bis zum 23.10.2016, 12:00 Uhr zu modellieren.

Dabei entspricht z. B. t = 0 der Zeit 0:00 Uhr am 20.10.2016, t = 1 der Zeit 0:00 Uhr am 21.10.2016 und t = 3,5 der Zeit 12:00 Uhr am 23.10.2016. h(t) ist der Wasserstand des Rheins an der Messstelle in Bonn in cm.

Der Graph von *h* ist in der *Abbildung 2* dargestellt.

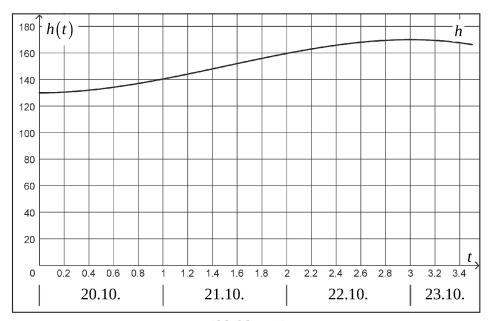


Abbildung 2

Mit der Funktion *h* ist es möglich, die Aufgaben a) bis d) zu bearbeiten.

Abbildung 1 von Zeitfixierer CC BY-SA 2.0 (Ausschnitt).

¹ Der Wasserstand ist die Höhe des Wassers an einer Messlatte (Pegel – siehe *Abbildung 1*) und entspricht nicht der Wassertiefe des Flusses.

8

raum.



Na	ame:
a)	Berechnen Sie den Wasserstand des Rheins an der Messstelle in Bonn am 21.10.2016 um 12:00 Uhr.
	(3 Punkte)
b)	Berechnen Sie $\frac{h(3)-h(1)}{2}$ und interpretieren Sie den berechneten Wert im Sachzusam-
	menhang. (4 Punkte)
c)	Ermitteln Sie rechnerisch den niedrigsten und höchsten Wasserstand im betrachteten Zeit-

d) Bestimmen Sie rechnerisch, wie lange der Wasserstand im betrachteten Zeitraum zwischen 140 cm und 150 cm lag.

(4 Punkte)

(9 Punkte)

In der folgenden Aufgabe e) wird der Wasserstand in einem über den 23.10.2016 hinausgehenden Zeitraum betrachtet.

Name: _____

e) In der folgenden *Abbildung 3* ist der Wasserstand im Zeitraum vom 20.10.2016, 0:00 Uhr (t = 0), bis zum 23.10.2016, 12:00 Uhr (t = 3,5), in einem erweiterten Koordinatensystem dargestellt.

Die *Abbildung 4* zeigt die momentane Änderungsrate des Wasserstandes im verlängerten Zeitraum vom 20.10.2016, 0:00 Uhr, bis zum 28.10.2016, 12:00 Uhr (t = 8,5).

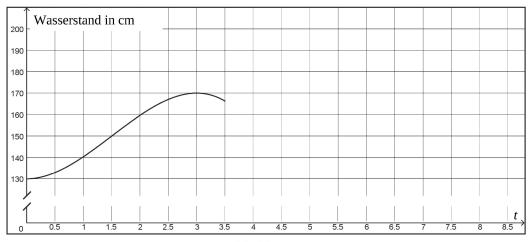


Abbildung 3

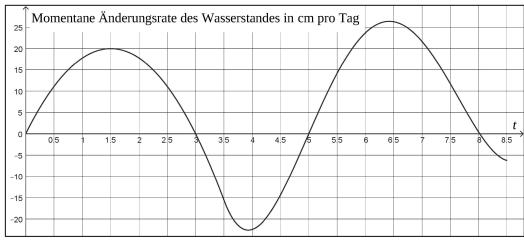


Abbildung 4

Skizzieren Sie, passend zu der in Abbildung 4 gegebenen momentanen Änderungsrate, in Abbildung 3 den weiteren Verlauf des Wasserstandes bis zum 28.10.2016, 12:00 Uhr.

(4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner) oder CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name:	

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2017

Mathematik

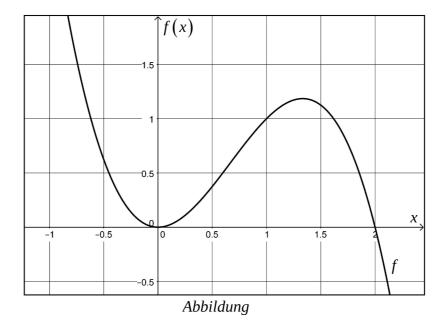
Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -x^3 + 2 \cdot x^2, x \in \mathbb{R}$$
.

Die *Abbildung* zeigt den Graphen von *f* .



a) Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt P(1|1).

(4 Punkte)

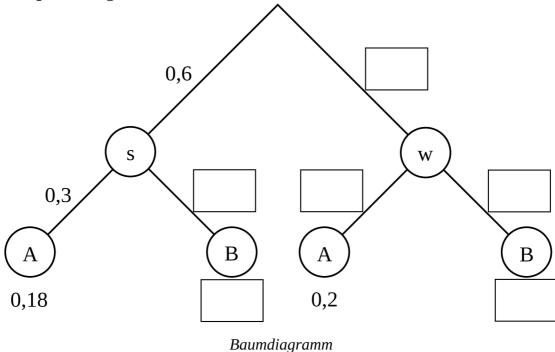
- b) (1) Geben Sie die Koordinaten eines Punktes A an, in dem der Graph von f die Steigung Null hat.
 - (2) Geben Sie die Koordinaten eines Punktes $B(x_B | y_B)$ an, so dass die Ableitung von f an der Stelle x_B negativ ist.

(1 + 1 Punkte)

Name.			

Aufgabe 2:

In einer Urne befinden sich schwarze (s) und weiße (w) Kugeln, die zusätzlich entweder mit dem Buchstaben A oder dem Buchstaben B beschriftet sind. Aus der Urne wird eine Kugel gezogen. Dieses Zufallsexperiment ist in dem folgenden unvollständig beschrifteten *Baumdiagramm* dargestellt.



a) Ermitteln Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten und geben Sie diese in den Rechtecken im Baumdiagramm an.

(4 Punkte)

b) Von der gezogenen Kugel wird zunächst nur bekannt gegeben, dass sie mit dem Buchstaben A beschriftet ist.

Stellen Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit auf, dass es sich um eine schwarze Kugel handelt.

[Eine Berechnung der Wahrscheinlichkeit ist nicht erforderlich.]

(2 Punkte)

Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

11



ZK M HT Prüfungsteil B Seite 1 von 5

Name:	

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2017

Mathematik

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion *f* mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 + 2, x \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie (gerundet auf zwei Nachkommastellen) die Nullstellen der Funktion f.

(3 Punkte)

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass x = 2 eine lokale Minimalstelle der Funktion f ist.

(6 Punkte)

c) Ausgehend von der Funktion f ist eine neue Funktion g mit der Gleichung

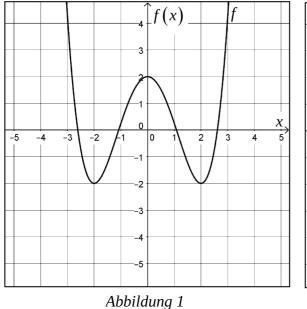
$$g(x) = f(x) - \frac{3}{2} \cdot x$$

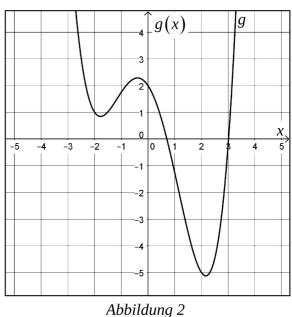
= $\frac{1}{4} \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 - \frac{3}{2} \cdot x + 2, x \in \mathbb{R},$

gegeben. Die *Abbildung 1* auf der folgenden Seite zeigt den Graphen von *f*, *die Abbildung 2* zeigt den Graphen von *g*.

Nennen Sie zwei Unterschiede der Graphen von f und g.

Name:





(4 Punkte)

d) Die Gerade $t: y = -\frac{3}{2} \cdot x - 2$ ist die Tangente an den Graphen von g im Punkt P(-2|1).

[Hinweis: Ein Nachweis, dass t die Tangente an den Graphen von g im Punkt P ist, ist nicht erforderlich.]

- (1) Zeichnen Sie die Tangente t in die Abbildung 2 ein.
- (2) Zeigen Sie rechnerisch, dass t auch in einem weiteren Punkt Q Tangente an den Graphen von g ist.

(2 + 6 Punkte)

e) Der Graph von *g* wird nun um 2 Einheiten nach rechts verschoben. Der verschobene Graph wird anschließend so weit nach unten verschoben, bis die Gerade *t* in zwei Punkten Tangente an den neuen Graphen ist.

Geben Sie an, um wie viele Einheiten der nach rechts verschobene Graph dazu nach unten verschoben werden muss, und begründen Sie Ihre Angabe.

(3 Punkte)

Name:	

Aufgabe 4:

Ausgehend von den Daten aus einer Statistik der Vereinten Nationen kann das Durchschnittsalter der Bevölkerung in einem Land A mit Hilfe der Funktion *a* mit der Gleichung

$$a(t) = -0.00011 \cdot t^3 + 0.0186 \cdot t^2 - 0.538 \cdot t + 24, t \in \mathbb{R},$$

modelliert werden.

Dabei ist t die Zeit in Jahren seit 1950 und a(t) das zugehörige Durchschnittsalter in Jahren. Mit der Funktion a können Prognosen bis zum Jahr 2030 erstellt werden.

Der Graph von *a* ist in *Abbildung 1* dargestellt.

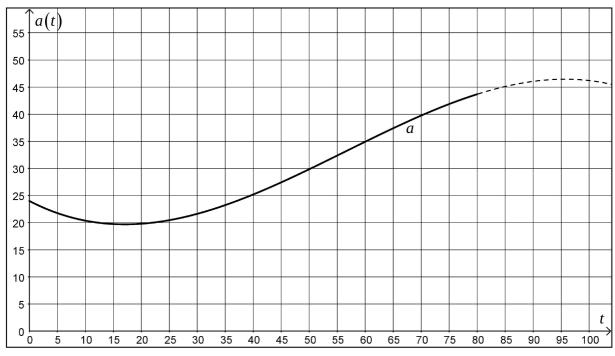


Abbildung 1

a) Bestimmen Sie das Durchschnittsalter der Bevölkerung für das Jahr 1950 (t = 0) und den Prognosewert für das Jahr 2030 (t = 80).

(4 Punkte)

b) Ermitteln Sie rechnerisch das niedrigste Durchschnittsalter der Bevölkerung im Zeitraum von 1950 bis 2030.

(8 Punkte)



Name:	

c) Die Entwicklung des Durchschnittsalters der Bevölkerung im Zeitraum von 2030 bis 2050 soll durch die Tangente an den Graphen von a an der Stelle t = 80 modelliert werden.

Ermitteln Sie in Abbildung 1 zeichnerisch näherungsweise das Durchschnittsalter der Bevölkerung für das Jahr 2050.

(3 Punkte)

d) In einem anderen Land B stimmte für das Jahr 1950 (t = 0) das Durchschnittsalter der Bevölkerung nahezu mit dem Durchschnittsalter in dem Land A überein. Die Rate, mit der sich das Durchschnittsalter der Bevölkerung in dem Land B ändert, ist in der folgenden *Abbildung 2* dargestellt.

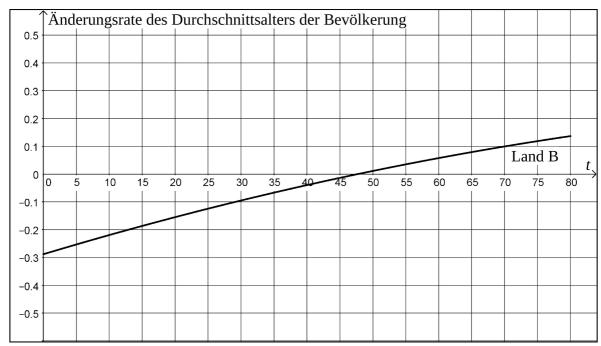


Abbildung 2

(1) Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Das Durchschnittsalter der Bevölkerung in dem Land B wächst von 1950 bis 2030 durchgängig.

- (2) Zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion a' in die Abbildung 2 ein und geben Sie die Bedeutung von a'(t) im Sachzusammenhang an.
- (3) Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Im Jahr 2020 wächst das Durchschnittsalter der Bevölkerung in dem Land A schneller als in dem Land B.

(2 + 5 + 2 Punkte)

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen



ZK M H1	Γ
Prüfungsteil E	3
Seite 5 von 5	5

Name:	

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner) oder CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung



ZK M HT Teil I (hilfsmittelfrei) Seite 1 von 2

Name:				

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2016

Mathematik

Teil I: Hilfsmittelfreier Teil

Aufgabe 1: Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 16 \cdot x - 2$.

Untersuchen Sie die Funktion f rechnerisch auf lokale Minimal- und Maximalstellen.

(6 Punkte)



Name:				

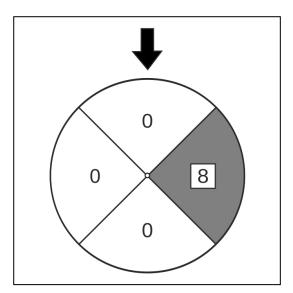
Aufgabe 2: Stochastik

Beim Spiel "Die wilde 8" wird das Glücksrad mit den beiden Zahlen 0 und 8 (siehe *Abbildung*) zweimal gedreht.

a) Erstellen Sie für dieses Zufallsexperiment ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten.

(2 Punkte)

- b) Die beiden Zahlen in den Feldern, auf die jeweils der Pfeil zeigt, werden addiert.
 - (1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass sich
 - die Summe 0 ergibt,
 - die Summe 8 ergibt,
 - die Summe 16 ergibt.



Abbildung

- (2) Der Spieleinsatz für das zweimalige Drehen des Glücksrades beim Spiel "Die wilde 8" beträgt 8€.
 - Bei der Summe 0 gibt es keine Auszahlung, der Spieleinsatz ist verloren.
 - Bei der Summe 8 wird der Spieleinsatz zurückgezahlt.
 - Bei der Summe 16 wird der zehnfache Spieleinsatz ausgezahlt.

Der Spielleiter behauptet, das Spiel sei "fair". Das heißt, dass ein Spieler auf lange Sicht weder Gewinn noch Verlust macht.

Untersuchen Sie, ob es sich wirklich um ein faires Spiel handelt.

(2 + 2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

• Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung



Name:			

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2016

Mathematik

Teil II: Innermathematische und kontextbezogene Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3: Analysis (innermathematische Aufgabe)

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{48} \cdot x^3 - \frac{3}{8} \cdot x^2 + \frac{27}{16} \cdot x + 1$.

Die *Abbildung 1* zeigt den Graphen von *f* .

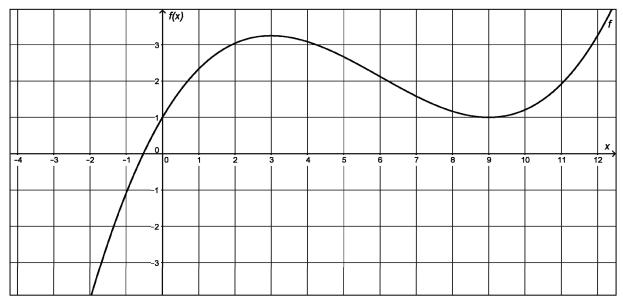


Abbildung 1

a) (1) Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung der Geraden s durch die Punkte $H\left(3\left|\frac{13}{4}\right.\right)$ und $T\left(9\left|1\right.\right)$.

[Zwischenergebnis: Die Gerade *s* hat die Steigung $-\frac{3}{8}$.]

(2) Es gibt zwei Stellen, an denen der Graph von *f* Tangenten hat, die parallel zur Geraden *s* verlaufen.

Ermitteln Sie diese Stellen auf zwei Nachkommastellen genau.

(5 + 4 Punkte)

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen



b) Gegeben ist zusätzlich die Funktion g mit der Gleichung

$$g(x) = \frac{1}{48} \cdot x^3 - \frac{3}{16} \cdot x^2 + \frac{13}{4}$$
.

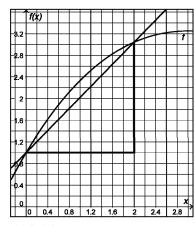
(1) Zeichnen Sie den Graphen von g in die Abbildung 1 ein.

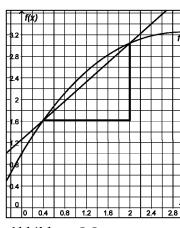
Der Graph der Funktion g geht durch eine Transformation aus dem Graphen der Funktion f hervor.

- (2) Geben Sie diese Transformation an.
- (3) Geben Sie eine Funktionsgleichung von g an, aus der die Transformation deutlich wird, durch die der Graph von g aus dem Graphen von f hervorgeht.

(4 + 2 + 2 Punkte)

c) Die folgenden *Abbildungen 2.1* bis 2.5 veranschaulichen, wie man den Wert der Ableitung f'(2) näherungsweise ermitteln kann.





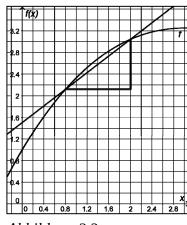
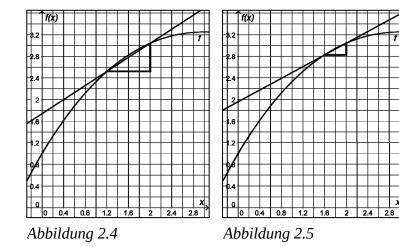


Abbildung 2.1

Abbildung 2.2

Abbildung 2.3



- (1) Geben Sie an, welche Abbildung zum Differenzenquotienten $\frac{f(2)-f(0,8)}{2-0,8}$ gehört.
- (2) Geben Sie an, welche geometrische Bedeutung der Wert f'(2) hat. Erklären Sie, warum in den Abbildungen 2.1 bis 2.5 veranschaulicht wird, wie dieser Wert immer genauer ermittelt werden kann.

(2 + 5 Punkte)



Name:			

Aufgabe 4: Analysis (kontextbezogene Aufgabe)

Während seines Urlaubs im norwegischen Vardø beobachtet Heinz an einem Tag Anfang August die Sonne. Dabei misst er zu jeder vollen Stunde den Sonnenhöhenwinkel α (siehe *Abbildung 1*), um so zu bestimmen, wie hoch die Sonne über dem Horizont steht.

Heinz trägt seine Winkelmessungen in ein Koordinatensystem ein (siehe *Abbildung 2*).

Dabei entspricht t = 0 der Uhrzeit 12:00 Uhr mittags, t = 1 entspricht 13:00 Uhr usw.

α

Abbildung 1

Der Uhrzeit 11:00 Uhr entspricht t = -1 usw.

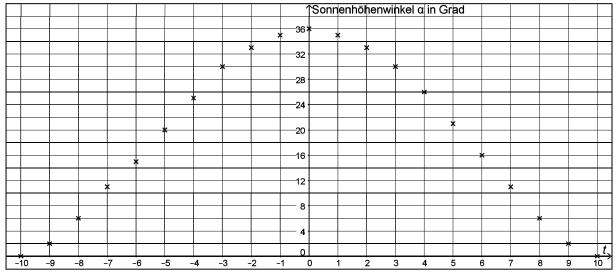


Abbildung 2

- a) (1) Geben Sie den Sonnenhöhenwinkel an, den Heinz um 7:00 Uhr morgens misst.
 - (2) Geben Sie an, in welchem Zeitraum Heinz Sonnenhöhenwinkel misst, die mindestens 30 Grad betragen.

(2 + 2 Punkte)

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen



ZK M HT Teil II (mit GTR / CAS) Seite 5 von 5

Name:						

Heinz modelliert anhand seiner Daten den Sonnenhöhenwinkel im Laufe des Tages mit einer ganzrationalen Funktion 4. Grades. Er verwendet dazu für $-10 \le t \le 10$ die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = 0.0031 \cdot t^4 - 0.671 \cdot t^2 + 36.1$$
.

- f(t) beschreibt den Sonnenhöhenwinkel in Grad zu der durch t gegebenen Uhrzeit.
- b) Die Werte, die sich bei der Modellierung mit der Funktion *f* ergeben, weichen etwas von den Werten aus der *Abbildung 2* ab.

Berechnen Sie die Abweichung zwischen dem um 7:00 Uhr morgens gemessenen Wert und dem entsprechenden Funktionswert.

(2 Punkte)

c) Bei der Messung von Heinz erreicht die Sonne ihren höchsten Stand um 12:00 Uhr mittags (siehe *Abbildung 2*).

Weisen Sie rechnerisch nach, dass auch bei der Modellierung mit der Funktion f die Sonne zu diesem Zeitpunkt ihren höchsten Stand erreicht.

(7 Punkte)

- d) (1) Weisen Sie nach, dass gilt: f'(-9) > f'(-2).
 - (2) Interpretieren Sie diese Ungleichung im Sachzusammenhang.

(2 + 2 Punkte)

An einem Tag Ende August beobachtet Heinz noch einmal die Sonne in Vardø. Um 04:00 Uhr morgens während des Sonnenaufgangs misst er den Sonnenhöhenwinkel 0 Grad, um 12:00 Uhr mittags ist der Sonnenhöhenwinkel mit 29 Grad maximal. Heinz möchte für diesen Tag den Sonnenhöhenwinkel mit einer ganzrationalen Funktion g modellieren.

- e) (1) Skizzieren Sie in der Abbildung 2 den Verlauf eines möglichen Graphen von g.
 - (2) Für die Funktionsgleichung von g wählt Heinz den Ansatz: $g(t) = a \cdot f(b \cdot t)$. Ermitteln Sie für a und b jeweils einen zu seiner Messung passenden Wert.

(3 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Graphikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Computeralgebrasystem (CAS)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name:		

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2015

Mathematik

Teil I: Hilfsmittelfreier Teil

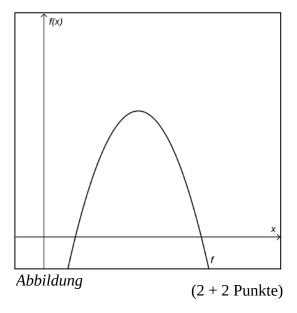
Aufgabe 1: Analysis

sitzt.

Die *Abbildung* zeigt den Graphen der Funktion *f* mit der Gleichung

$$f(x) = -x^2 + 6 \cdot x - 5$$
.

- a) (1) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.
 - (2) Skizzieren Sie in die Abbildung den Graphen der Ableitungsfunktion f'.



b) Ermitteln Sie, um wie viele Einheiten der Graph von f nach unten verschoben werden muss, so dass der verschobene Graph nur einen gemeinsamen Punkt mit der x-Achse be-

(2 Punkte)

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen



ZK M HT Teil I (hilfsmittelfrei) Seite 2 von 2

Name:	
-------	--

Aufgabe 2: Stochastik

Eine Firma hat einen neuen Wirkstoff gegen Erkältungsbeschwerden entwickelt, dessen Wirksamkeit an erkälteten Versuchspersonen getestet wurde:

- 60 % der Versuchspersonen erhielten eine Tablette mit dem neuen Wirkstoff, die übrigen Versuchspersonen erhielten eine Tablette ohne Wirkstoff.
- Nach einer Stunde trat insgesamt bei der Hälfte aller Versuchspersonen eine Linderung ein.
- 38 % der Versuchspersonen erhielten eine Tablette ohne Wirkstoff und verspürten keine Linderung.
- a) Stellen Sie den oben beschriebenen Sachverhalt dar, indem Sie alle Prozentsätze ermitteln und in die folgende Tabelle eintragen.

	Linderung	keine Linderung	Gesamt
Tablette ohne Wirkstoff			
Tablette mit Wirkstoff			
Gesamt			

Tabelle

(3 Punkte)

b) Eine Versuchsperson verspürt eine Linderung.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie eine Tablette mit Wirkstoff erhalten hat.

(3 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

• Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung



Name:						

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2015

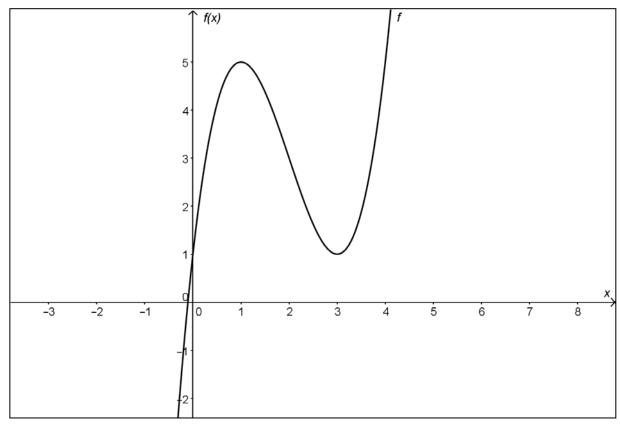
Mathematik

Teil II: Innermathematische und kontextbezogene Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3: Analysis (innermathematische Aufgabe)

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 1$.

Die Abbildung zeigt den Graphen von f.



Abbildung



Name:						

a) Ermitteln Sie auf drei Nachkommastellen genau die Nullstelle der Funktion f.

(2 Punkte)

b) Ermitteln Sie rechnerisch den lokalen Hochpunkt und den lokalen Tiefpunkt des Graphen von f.

(7 Punkte)

c) Zeichnen Sie in die Abbildung die Sekante s durch die Punkte P(2|3) und Q(3|1) ein. Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung dieser Sekante s.

(6 Punkte)

d) Ein Schüler möchte am Beispiel der Funktion f in einem Referat erklären, wie deren Ableitung f'(a) an einer Stelle a näherungsweise ermittelt werden kann. Dazu hat er eine Tabelle angelegt.

Term	$\frac{f(2,4)-3}{2,4-2}$	$\frac{f(2,3)-3}{2,3-2}$	$\frac{f(2,2)-3}{2,2-2}$	$\frac{f(2,1)-3}{2,1-2}$
Wert	-2,84	-2,91	-2,96	-2,99

Tabelle

Geben Sie an, um welche Stelle a es sich hier handelt.

Erklären Sie, warum die Tabellenwerte sich immer mehr der Ableitung f'(a) annähern.

(4 Punkte)

e) Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion *g* mit der Gleichung

$$g(x) = x^3 - 9 \cdot x^2 + 24 \cdot x - 18$$
.

Ermitteln Sie, durch welche Transformationen der Graph der Funktion g aus dem Graphen der Funktion f hervorgeht, und beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.

(5 Punkte)

Name:				

Aufgabe 4: Analysis (kontextbezogene Aufgabe)

Früher wurden in den Städten auf Hügeln oder kleineren Bergen Wassertürme gebaut. Durch das in den Türmen gespeicherte Wasser konnte ein ausreichender Wasserdruck für die Versorgung der Wohnungen mit Trinkwasser sichergestellt werden.

Im Folgenden soll die Wassermenge im Speicher eines Wasserturms untersucht werden.

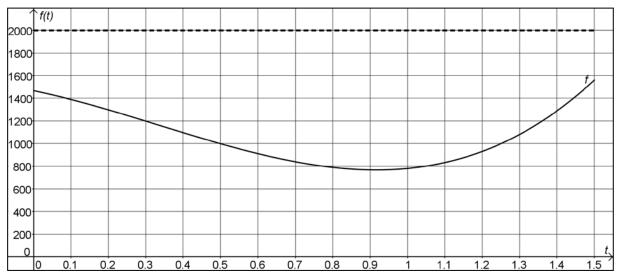
Um den nötigen Wasserdruck zu gewährleisten, soll dafür gesorgt werden, dass ständig mindestens 1000 m³ Wasser (Sollwert) im Speicher des Turmes vorhanden sind. Die maximale Füllmenge beträgt 2000 m³.

Für einen bestimmten Tag wird die Wassermenge im Speicher des Turmes im Zeitraum von 6:00 Uhr bis 7:30 Uhr für $0 \le t \le 1,5$ durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = 1000 \cdot t^3 - 1000 \cdot t^2 - 687 \cdot t + 1467$$

modelliert. Dabei bezeichnet t die Zeit in Stunden, die seit 6:00 Uhr vergangen ist, und f(t) die Wassermenge im Speicher des Turmes in m^3 .

Der Graph der Funktion *f* ist in der folgenden *Abbildung* dargestellt.



Abbildung

Mit der Funktion *f* ist es möglich, die folgenden Aufgabenstellungen zu bearbeiten.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen



ZK M HT Teil II (mit GTR / CAS) Seite 4 von 4

- a) (1) Zeigen Sie, dass um 7:00 Uhr nur noch 780 m³ Wasser im Speicher des Turmes vorhanden sind.
 - (2) Ermitteln Sie näherungsweise die Zeiträume, in denen die Wassermenge über dem Sollwert von 1000 m³ liegt.

(2 + 4 Punkte)

b) Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Wassermenge im Speicher des Turmes minimal ist.

Berechnen Sie, um wie viele m³ Wasser der Sollwert zu diesem Zeitpunkt unterschritten wird.

(8 Punkte)

c) Berechnen Sie $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$ und f'(1) und interpretieren Sie die berechneten Werte im Sachzusammenhang.

(4 Punkte)

d) Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion g mit der Gleichung

$$g(t) = -1000 \cdot t^3 + 1000 \cdot t^2 + 687 \cdot t + 533.$$

- (1) Zeichnen Sie den Graphen von g in die Abbildung ein.
- (2) Erklären Sie, welche Bedeutung die Funktionswerte g(t) mit $0 \le t \le 1,5$ im Sachzusammenhang haben.

(4 + 2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Graphikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Computeralgebrasystem (CAS)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung