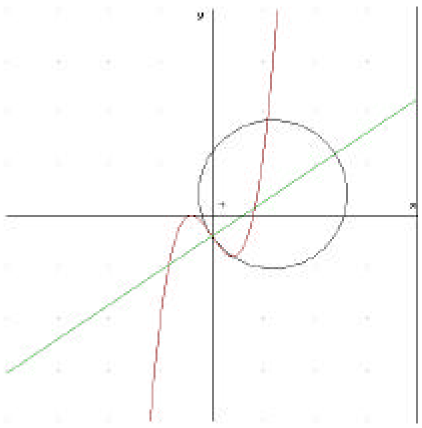
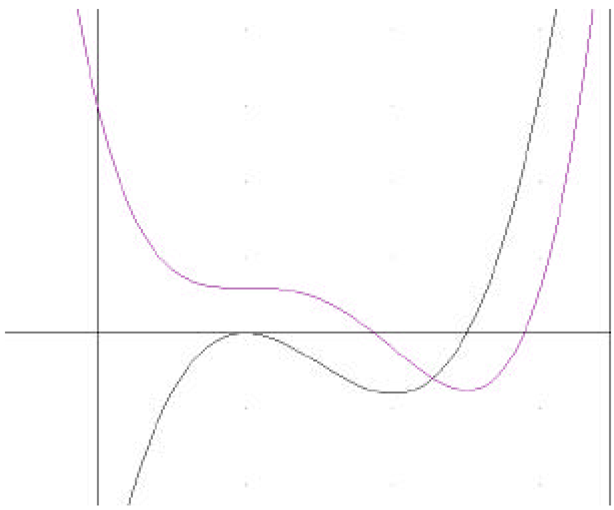
Lösungen

Aufgabe 1

1a	Nullstellen: notw. und hinr. Bedingung: f(x)=0. $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}(x^3-12x-16)=0$. $(x^3-12x-16):(x+2)=x^2-2x-8$ $-(x^3+2x^2)$ -------- $-2x^2-12x-16$ $-(-2x^2-4x)$ --------- $-8x-16$ $-(-8x-16)$ -------- 0 Die Nullstelle x=-2 wird erraten. Um die weiteren Nullstellen zu finden, wird eine Polynomdivision durchgeführt. Die weiteren Lösungen ergeben sich aus $x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=9 \Leftrightarrow x=4 \vee x=-2$. Die Nullstellen sind: $x_{N_1}=-2$ und $x_{N_2}=4$. Berechnung der Extremstellen: Notw. Bedingung ist: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}(x^2-4)=0$. Man sieht sofort, dass $x_{e_1}=-2$ und $x_{E_2}=2$ mögliche Extremstellen sind. Es ist: $f''(x)=\frac{3}{4}x$, $f''(-2)=-\frac{3}{2}<0$ und $f''(2)=\frac{3}{2}>0$. $x_{E_1}=-2$ ist lokales Maximum, $x_{E_1}=2$ ist lokales Minimum.	1 1 3 3 3 2
1b	Berechnung der Wendestelle: Notw. Bedingung: $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$. $x_W=0$ ist einzige Wendestelle. y-Wert: $y_W=-2$. Gleichung der Tangente: Die Steigung m_t der Tangente in W(0;-2) ergibt sich aus der ersten Ableitung von f an der Stelle $x_W=0$. Es ist $f'(0)=-\frac{3}{2}$. Aus y=mx+k ergibt sich daher $t: y=-\frac{3}{2}x+k$. Da W auf der Tangente liegt, folgt k=-2. Entsprechend erhält man die Gleichung der Normalen, wobei die Steigung der Normalen m_n mit der Formel $m_n=-\frac{1}{m_t}$ zu $m_n=\frac{2}{3}$ berechnet wird. Es ergibt sich: $n: y=\frac{2}{3}x-2$.	1 1 3 3
1c	Für die Gleichung des Kreises mit Mittelpunkt in M(c;d) gilt: $(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$. r ist dabei der Radius des Kreises. Da W auf dem Kreis liegen soll, ergibt sich: $(-c)^2+(-2-d)^2=52$. Weil der Mittelpunkt des Kreises auf der Normalen liegen soll, muss gelten: $d=\frac{2}{3}c-2$. Setzt man dies in die erste Gleichung ein, so folgt:  $c^2+(\frac{2}{3}c)^2=52 \Leftrightarrow \frac{13}{9}c^2=52 \Leftrightarrow c=-6 \vee c=6$. Für d erhält man $d=-6 \vee d=2$. Es geben sich also zwei Kreise mit den Mittelpunkten $M_1(-6;-6)$ und $M_2(6;2)$.	1 2 2 1 1

Aufgabe 2

2a	Der Grad der Ableitungsfunktion ist größer oder gleich 3. Eine der möglichen Begründungen wird erwartet: • über Nullstellen: Bei Verschiebung des Graphen in y-Richtung entstehen höchstens 3 Nullstellen. Das Produkt der zugehörigen Linearfaktoren hat den Grad 3. • Über Extremstellen: Der Graph von f' hat zwei Extremstellen. Die Ableitungsfunktion f'' von f' besitzt daher zwei Nullstellen. f'' ist also (mindestens) 2. Grades. f'' ist f' Ableitung von f', also muss f' (mindestens) 3. Grades sein. • Über Wendestellen: analog	1 3
2b	Der Graph von f fällt im Intervall [a, d] monoton, da die Werte der Ableitungsfunktion f' in diesem Intervall negativ sind. Für x-Werte aus dem Intervall [d,e] steigt der Graph von f monoton, da die Ableitungsfunktion dort positiv ist.	3
2c	zur Stelle b: Weil $f'(b) = 0$ ist, hat der Graph von f eine waagerechte Tangente. Das Vorzeichenverhalten von f' ändert sich bei b nicht, es liegt also eine Sattelstelle von f vor. zur Stelle c: Der Graph von f' besitzt bei c einen Tiefpunkt, es liegt bei c also eine Wendestelle von f vor. zur Stelle d: Weil $f'(d) = 0$ ist, hat der Graph von f eine waagerechte Tangente. Das Vorzeichen von f' wechselt von negativen zu positiven Werten. f geht daher von fallendem zu steigendem Verhalten über, es liegt also eine Minimalstelle von f vor.	3 2 2
2d	Skizze: 	3
2e	f kann bis zu 4 Nullstellen haben, da der Grad von f gleich 4 ist, wobei mehrfache Nullstellen auftreten können. Wenn der Sattelpunkt auf der x-Achse liegt, gibt es eine dreifache und eine einfache Nullstelle, wenn der Sattelpunkt unter der x-Achse liegt, dann gibt es zwei einfache Nullstellen, wenn der Tiefpunkt oberhalb der x-Achse liegt, dann gibt es gar keine Nullstelle, wenn der Graph die x-Achse im Tiefpunkt berührt, dann existiert eine doppelte Nullstelle.	3

Aufgabe 3

3a	$f'(x) = -3x^2 + 60x - 225$ $f'(9) = 72$ Mögliche Antworten sind z.B. - zu diesem Zeitpunkt steigt die Anzahl der Surfer um 72 Surfer pro Stunde - die lokale Änderungsrate beträgt 72 Surfer pro Stunde. Innermathematische Formulierungen wie z.B. " $f'(9)$ gibt die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 9$ an" berücksichtigen den Kontext nicht angemessen.	1 1 2
3b	Ermittlung des durchschnittlichen Spitzenwertes: Wenn x relative Extremstelle ist, dann muss gelten: $f'(x) = 0$. $f'(x) = 0$ $\Leftrightarrow -3x^2 + 60x - 225 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - 20x + 75 = 0$ $\Leftrightarrow x = 5 \vee x = 15$ Eine hinr. Bedingung für ein relatives Maximum ist: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$. Es ist: $f''(x) = -6x + 60$. Wegen $f''(5) > 0$ und $f''(15) < 0$ ergibt sich für $x = 15$ ein relatives Maximum mit $f(15) = 520$. Der Randwert $f(4)$ liegt deutlich darunter. Als Spitzenwert ergeben sich also durchschnittlich 520 Surfer.	2 3
3c	Der Spitzenwert lag am 31.Mai mit 805 Surfern um 285 über dem durchschnittlichen Spitzenwert von 520. $p = \frac{285}{520} 100\% \approx 54{,}81\%$ Damit lag der Spitzenwert am 31. Mai um ca 55% über dem durchschnittlichen Spitzenwert.	2
3d	Es sind unterschiedliche Prognosen möglich: (a) Annahme: An diesem bestimmten Tag wird die Zunahme von 9h bis 10h dem durchschnittlichen Zuwachs entsprechen. Prognose: $240 + (f(10) - f(9) = 240 + (270 - 196) = 314$ (b) Annahme: An diesem bestimmten Tag entspricht die lokale Veränderungsrate um 9h der durchschnittlichen lokalen Änderungsrate um 9h. Prognose: $240 + f'(9) \cdot (10 - 9) = 240 + 72 = 312$ (c) Annahme: An diesem Tag wird sich um 10h die gleiche prozentuale Zunahme gegenüber der durchschnittlichen Surferzahl um 10h ergeben, wie sie sich an diesem Tag bereits um 9h ergeben hat. Dann ist. $\frac{240}{f(9)} = \frac{x}{f(10)}$ Daraus folgt die Prognose: $x = \frac{240 \cdot 270}{196} \approx 331$ Zur Bewertung: Falls ein Schüler mehr als eine Prognose abgibt und sie begründet und ggfs. die Prognosen gegeneinander abwägt, kann er bis zu zwei Zusatzpunkte erhalten.	3 evtl. 2

Punkteverteilung:

1a	1b	1c	2a	2b	2c	2d	2e	3a	3b	3c	3d
13	8	7	4	3	7	3	3	4	5	2	3
28			20					14			

Voraussetzungen zu 1:

a) Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen (Monotonie, Nullstellenberechnung, Extremstellen, Wendestellen, Sattelstellen, Tangenten- und Normalengleichung)
b) Ermittlung von Kreisgleichungen

Voraussetzungen zu 2:

a) Qualitative Aussagen über die grundsätzlichen Möglichkeiten des Verlaufs des Graphen einer ganzrationalen Funktion bis maximal 4. Grades
b) Begründung des graphischen Zusammenhangs zwischen f, f' und f'' und ihre zeichnerische Umsetzung

Voraussetzungen zu 3:

a) Auswertung einer ganzrationalen Funktion, die die zeitabhängigen Veränderungen einer Größe beschreibt
b) Deutung von Funktionswerten, mittlerer Änderungsraten, Ableitungswerten, Wendestellen in einem einfachen Kontext