Vergleichsklausur 2005 für Klassenstufe 11

Termin: 8. Juni 2005, 3. und 4. Stunde **reine Arbeitszeit: 90 min**

Von den drei Analysisaufgaben werden zwei, von den Aufgaben zur Geometrie und zur beschreibenden Statistik wird eine Aufgabe vom Fachlehrer ausgewählt. Diese drei Aufgaben sind dann von den Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten.

1. Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte und den Wendepunkt des Graphen von f. Skizzieren Sie den Graphen im Intervall von –1 bis 2.

b) Berechnen Sie die Gleichung der Normale im Wendepunkt.

c) Wir betrachten nun die Funktion w mit $w(x) = a \cdot f(x)$ mit $a > 1$. Wie verändern sich die Lage des Wendepunktes und der Verlauf der Wendetangente, wenn a wächst? Geben Sie eine Begründung an!

2. Aufgabe

In der Sportmedizin kennt man den Begriff der *anaeroben Schwelle*. Dieser Begriff lässt sich vereinfacht folgendermaßen erklären:

Die Energiebereitstellung für eine länger andauernde Bewegung bezeichnet man als *aerob*, wenn durch die Atmung so viel Sauerstoff aufgenommen wird, wie der Körper zur Bewegung benötigt. Steht – etwa bei einer intensiven Belastung – nicht genügend Sauerstoff zur Verfügung, so bildet der Körper zunehmend Laktat (Milchsäure) und die Bewegung wird immer schwerer. Die Energiegewinnung ohne Sauerstoff („anaerob“) spielt dann eine maßgebliche Rolle. Die Grenze zwischen diesen beiden Zuständen heißt *anaerobe Schwelle*.

Die anaerobe Schwelle kann dazu benutzt werden, den Trainingszustand eines Sportlers zu untersuchen. Ein gängiges Verfahren zur Bestimmung der anaeroben Schwelle nutzt die Laktatkonzentration im Blut. Bei der Untersuchung läuft der Sportler auf einem Laufband. Die Geschwindigkeit dieses Laufbandes wird in gleichen Zeitabständen gleichmäßig erhöht. Dabei wird immer wieder die Laktatkonzentration im Blut gemessen. Je höher die Geschwindigkeit ist, bei der der Sportler die anaerobe Schwelle erreicht, desto besser ist sein Trainingszustand.

Bei einem bestimmten Sportler A wird diese Untersuchung durchgeführt. Dabei ergibt sich aus den Messwerten näherungsweise die in Abbildung 1 gezeichnete Laktatkurve. Diese kann für $7 \le x \le 18$ durch folgende Gleichung dargestellt werden

$$f(x) = 0{,}03x^3 - 0{,}918x^2 + 9x - 25\,.$$

x bezeichnet dabei die Laufgeschwindigkeit in $\frac{km}{h}$, f(x) die Laktatkonzentration in Millimol pro Liter.

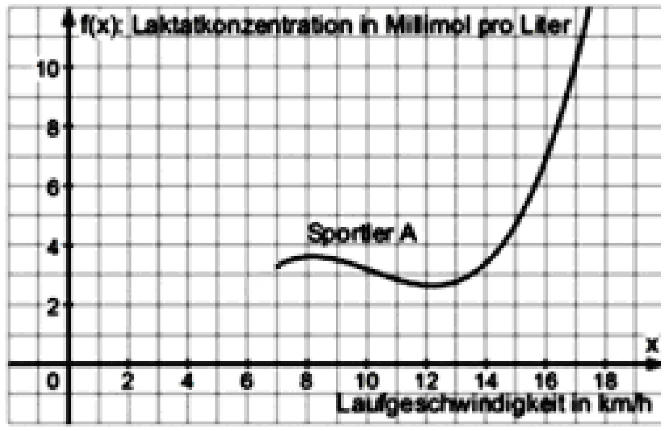


Abbildung 1

a) Berechnen Sie die Laktatkonzentration, die sich für Sportler A bei $16\frac{km}{h}$ ergibt!

b) Zur Berechnung der anaeroben Schwelle gibt es zwei unterschiedliche mathematische Modelle. Nach dem Mader-Modell (1976) wird die anaerobe Schwelle bei einer Laktatkonzentration von 4 Millimol pro Liter erreicht. Bestimmen Sie aus der Zeichnung einen Näherungswert für die Geschwindigkeit, bei der die anaerobe Schwelle überschritten wird.

c) Nach dem Modell des Sportmediziners G. Simon (1981) findet man die anaerobe Schwelle, indem man den Punkt der Kurve ermittelt, in dem die Steigung 1 ist. Bestimmen Sie rechnerisch die Geschwindigkeit für die anaerobe Schwelle nach dem Modell von Simon!

d) Bei der abgebildeten Laktatkurve fällt auf (s. Abbildung 1), dass die Laktatkonzentration in einem bestimmten Geschwindigkeitsbereich abnimmt. Berechnen Sie die Grenzen dieses Bereiches!

e) Bei welcher Laufgeschwindigkeit nimmt die Laktatkonzentration am stärksten ab?

f) Abbildung 2 zeigt die Laktatkurve eines Sportlers B, für den die Untersuchung wie für Sportler A durchgeführt wurde. Begründen Sie, welcher der beiden Sportler A und B den besseren Trainingszustand aufweist!

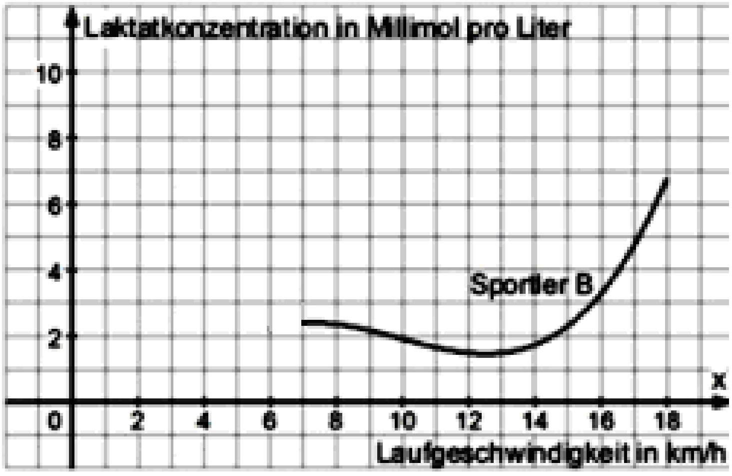


Abbildung 2

3. Aufgabe **Gruppe A**

Bei der folgenden Multiple-Choice-Aufgabe gilt:

- alle richtigen Angaben sind durch Ankreuzen ($\boxed{\text{X}}$) zu kennzeichnen
- es können bis zu vier Angaben pro Aufgabenteil richtig sein
- ein Aufgabenteil gilt nur dann als bearbeitet, wenn wenigstens eine Angabe durch Ankreuzen gekennzeichnet ist

a) Welche der folgenden Aussagen sind für **jede** ganzrationale Funktion 3. Grades zutreffend?

☐ Die Funktion hat eine Wendestelle.

☐ Die Funktion hat 3 Nullstellen.

☐ Die Funktion hat höchstens zwei Extremstellen.

☐ Die Funktion hat mindestens eine Nullstelle.

☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

b) Welche der folgenden Aussagen über ganzrationale Funktionen sind richtig?

☐ Wenn eine Funktion f an einer Stelle x_0 einen Tiefpunkt besitzt, dann gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$.

☐ Liegt in einem Punkt eines Graphen ein Übergang von einer Zunahme der Steigung zu einer Abnahme der Steigung vor, so handelt es sich um einen Wendepunkt.

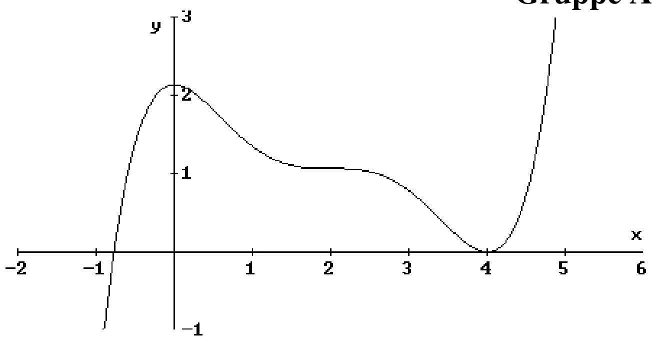
☐ Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann hat die Funktion f an der Stelle x_0 einen Tiefpunkt.

☐ Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, dann hat die Funktion f an der Stelle x_0 keinen Extrempunkt.

☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

Gruppe A

c) In der nebenstehenden Zeichnung sehen Sie den Graphen einer ganzrationalen Funktion *f*.
Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?



☐ f hat mindestens den Grad 5.

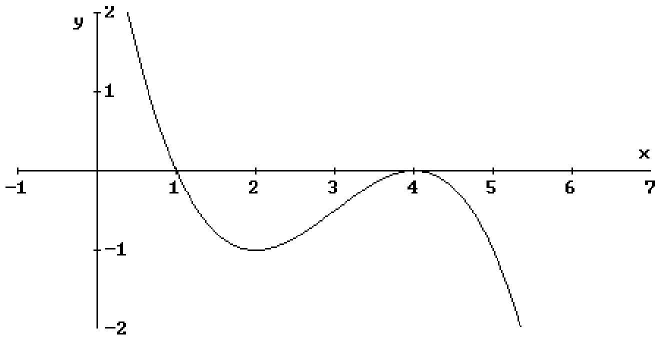
☐ Der Graph der Ableitungsfunktion f' hat an der Stelle 2 einen Extrempunkt.

☐ Die Ableitungsfunktion f' fällt im Bereich von 0 bis 4.

☐ Für $0 < x < 1$ gilt $f'(x) < 0$.

☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

d) In der nebenstehenden Zeichnung sehen Sie den Graphen einer Ableitungsfunktion f'.
Welche der folgenden Aussagen über die Ausgangsfunktion f sind zutreffend?



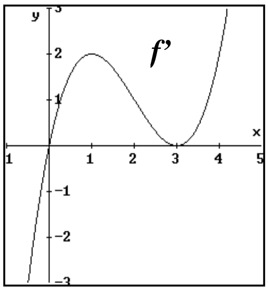
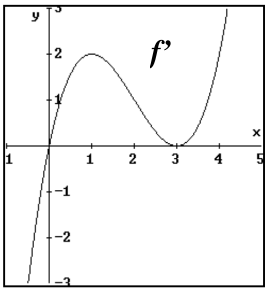
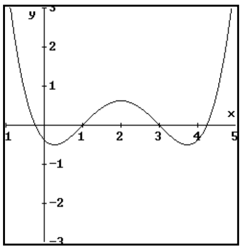
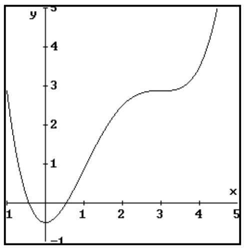
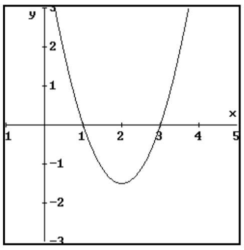
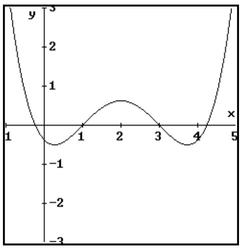
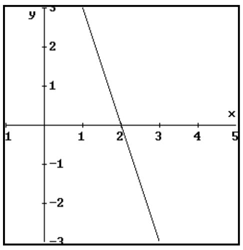
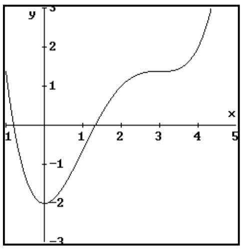
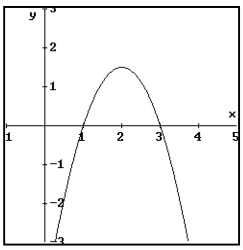
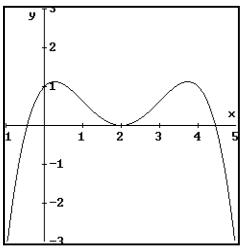
☐ Der Graph von f hat an der Stelle 1 einen Hochpunkt.

☐ Der Graph von f hat an der Stelle 4 einen Tiefpunkt.

☐ f hat im dargestellten Bereich zwei Wendestellen.

☐ Im Intervall von 1 bis 4 ist der Graph von f monoton steigend.

☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

e)	f) **Gruppe A**
 Im Bild sehen Sie den Graph der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.	 Im Bild sehen Sie den Graph der Ableitungsfunktion f' zu einer Funktion f.
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Keiner der Graphen passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Keiner der Graphen passt zu einer Funktion *f*, deren Ableitung f' ist. ☐

3. Aufgabe **Gruppe B**

Bei der folgenden Multiple-Choice-Aufgabe gilt:

- alle richtigen Angaben sind durch Ankreuzen ($\boxed{\text{X}}$) zu kennzeichnen
- es können bis zu vier Angaben pro Aufgabenteil richtig sein
- ein Aufgabenteil gilt nur dann als bearbeitet, wenn wenigstens eine Angabe durch Ankreuzen gekennzeichnet ist

a) Welche der folgenden Aussagen sind für **jede** ganzrationale Funktion 3. Grades zutreffend?

☐ Die Funktion hat 3 Nullstellen.

☐ Die Funktion hat höchstens zwei Extremstellen.

☐ Die Funktion hat eine Wendestelle.

☐ Die Funktion hat mindestens eine Nullstelle.

☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

b) Welche der folgenden Aussagen über ganzrationale Funktionen sind richtig?

☐ Liegt in einem Punkt eines Graphen ein Übergang von einer Zunahme der Steigung zu einer Abnahme der Steigung vor, so handelt es sich um einen Wendepunkt.

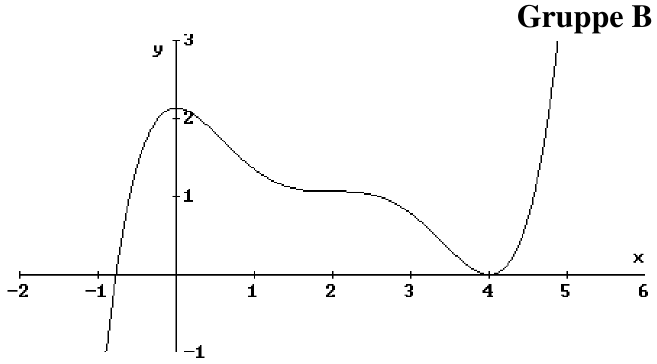
☐ Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann hat die Funktion f an der Stelle x_0 einen Tiefpunkt.

☐ Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, dann hat die Funktion f an der Stelle x_0 keinen Extrempunkt.

☐ Wenn eine Funktion f an einer Stelle x_0 einen Tiefpunkt besitzt, dann gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$.

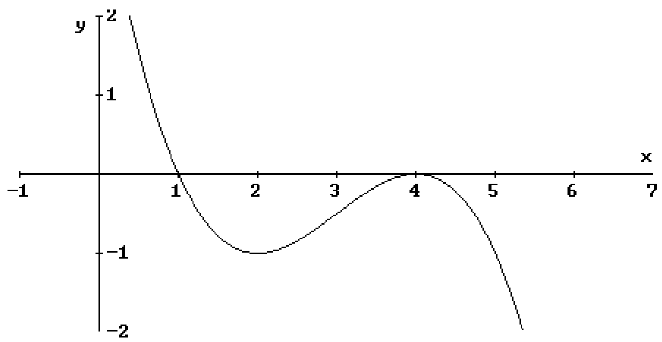
☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

c) In der nebenstehenden Zeichnung sehen Sie den Graphen einer ganzrationalen Funktion *f*.
Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?

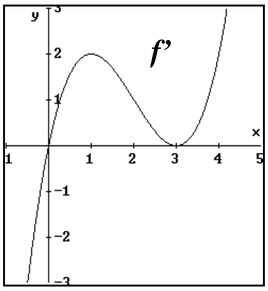
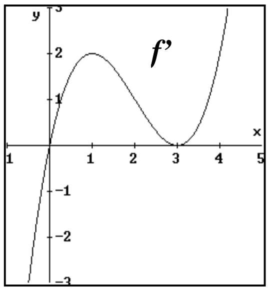
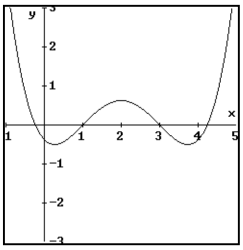
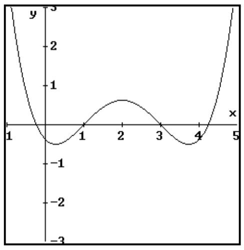
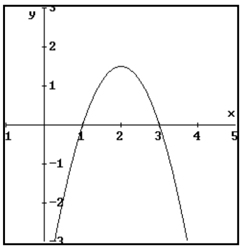
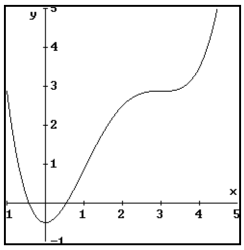
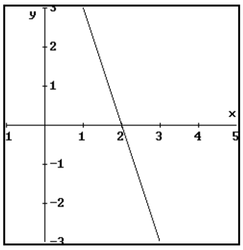
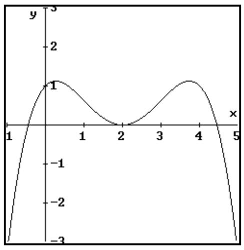
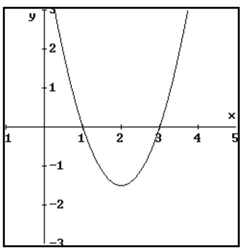
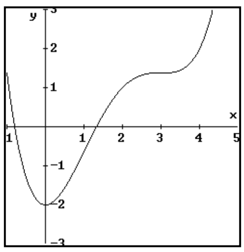


- ☐ Der Graph der Ableitungsfunktion f' hat an der Stelle 2 einen Extrempunkt.
- ☐ Die Ableitungsfunktion f' fällt im Bereich von 0 bis 4.
- ☐ Für 0 < x < 1 gilt $f'(x) < 0$.
- ☐ f hat mindestens den Grad 5.
- ☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

d) In der nebenstehenden Zeichnung sehen Sie den Graphen einer Ableitungsfunktion f'.
Welche der folgenden Aussagen über die Ausgangsfunktion f sind zutreffend?



- ☐ Der Graph von f hat an der Stelle 4 einen Tiefpunkt.
- ☐ Der Graph von f hat an der Stelle 1 einen Hochpunkt.
- ☐ Im Intervall von 1 bis 4 ist der Graph von f monoton steigend.
- ☐ f hat im dargestellten Bereich zwei Wendestellen.
- ☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

e)	f) **Gruppe B**
 Im Bild sehen Sie den Graph der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.	 Im Bild sehen Sie den Graph der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''.	Der Graph  passt zur Funktion f.
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''.	Der Graph  passt zur Funktion f.
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''.	Der Graph  passt zur Funktion f.
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''.	Der Graph  passt zur Funktion f.
Keiner der Graphen passt zur zweiten Ableitung f''.	Keiner der Graphen passt zu einer Funktion f, deren Ableitung f' ist.

4. Aufgabe **(Zirkel wird benötigt!)**

In einem Koordinatensystem sind die Punkte $A(2|-3)$ und $B(8|5)$ gegeben. Die Strecke $\overline{AB}$ soll so zu einem rechtwinkligen Dreieck ergänzt werden, dass die dritte Ecke C auf der x-Achse liegt. Es gibt vier Lösungen zu der Aufgabe. Zwei Lösungen findet man, indem man den Thaleskreis verwendet. Der rechte Winkel kann aber auch bei A oder B liegen.

a) Konstruieren Sie zeichnerisch alle Lösungen der Aufgabe. Benutzen Sie für das Koordinatensystem ein eigenes Blatt und wählen Sie dabei für die x-Koordinate einen Bereich von -2 bis 15 sowie für die y-Koordinate von -5 bis 10. Nehmen Sie 1cm für eine Einheit.

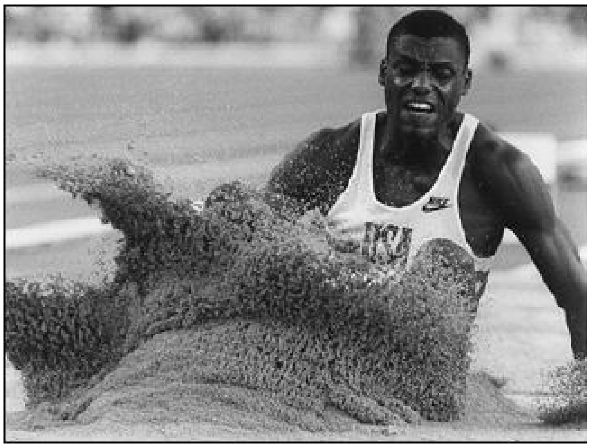
b) Ermitteln Sie die Gleichungen für den Thaleskreis k und für seine Tangente g in B.

c) Berechnen Sie die Schnittstellen von k mit der x-Achse und die Schnittstelle von g mit der x-Achse.

d) Bei der bisherigen Lage der Strecke $\overline{AB}$ ergeben sich vier Dreiecke (siehe Aufgabe a)). Durch Verschieben der Strecke $\overline{AB}$ parallel zur y-Achse nach oben verändern sich die Dreiecke. Dabei kann sich auch die Anzahl n der möglichen Dreiecke verändern. Skizzieren Sie die Situation für zwei verschiedene Fälle, in denen die Anzahl $n \neq 4$ ist.

5. Aufgabe

Carl Lewis war einer der erfolgreichsten Leichtathleten des 20. Jahrhunderts. Zwischen 1984 und 1996 gewann er 20 Medaillen bei Olympischen Spielen und Weltmeisterschaften, 17 davon waren Goldmedaillen. Er wurde 1984 mit 4 Goldmedaillen (100m-Lauf, 200m-Lauf, Weitsprung, 4x100m-Staffel) zum Star der Olympischen Spiele in Los Angeles. Carl Lewis gewann 18 nationale Titel und war in seiner Karriere Gewinner von über 200 Wettbewerben.



In der folgenden Tabelle finden Sie die 100m-Zeiten und die Weitsprungweiten, die er zwischen 1984 und 1991 bei Olympischen Spielen und Weltmeisterschaften erzielte.

	Zeit im 100m-Lauf in s	Weite im Weitsprung in m
Olympische Spiele 1984 Los Angeles	9,99	8,54
Weltmeisterschaft 1987 Rom	9,93	8,67
Olympische Spiele 1988 Seoul	9,92	8,72
Weltmeisterschaft 1991 Tokio	9,86	8,91

Bei den folgenden Rechnungen sind die Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen genau zu berechnen und anzugeben.

a) Stellen Sie den Datensatz in einem geeigneten Koordinatensystem dar (waagerechte Achse: 100m-Zeit, senkrechte Achse: Weitsprungweite). Berücksichtigen Sie in der Zeichnung nur den relevanten Bereich auf beiden Achsen.
Wie erklären Sie sich den Zusammenhang der beiden Größen?

b) Errechnen Sie den Schwerpunkt der Punktwolke. Zeichnen Sie eine Gerade durch den Schwerpunkt und den zur Weltmeisterschaft in Tokio gehörenden Datenpunkt. Berechnen Sie die Gleichung dieser Geraden.

c) Mit einem Computerprogramm wurde folgende Gleichung der Regressionsgeraden ermittelt:
$$y = -2{,}86x + 37{,}08$$
Die beste von Carl Lewis im Jahr 1985 in einem Wettbewerb erzielte Weitsprungweite war 8,62 m. Wie schnell könnte er demnach bei diesem Wettbewerb im 100m-Lauf gewesen sein? Berechnen Sie diese Zeit sowohl mit der in Aufgabe b) berechneten Geradengleichung als auch mit der Gleichung der Regressionsgeraden.

d) Außerhalb eines bestimmten Bereichs liefert die Regressionsgerade keinen sinnvollen Zusammenhang von Laufzeit und Sprungweite. Belegen Sie dies anhand eines geeigneten Beispiels aus dieser Aufgabe.

e) Computerprogramme verwenden zur Berechnung von Regressionsgeraden üblicherweise die Methode der kleinsten Quadrate. Beschreiben Sie kurz diese Methode. Warum ist diese Methode überzeugender als die in b) verwendete Methode, bei der eine Gerade durch den Datenschwerpunkt betrachtet wurde?

Lernvoraussetzungen:

Wegen der großen Beliebtheit der Multiple-Choice-Aufgabe wird diese Aufgabenform auch diesmal angeboten. Um Täuschungsversuchen zumindest vorzubeugen, wird diese Aufgabe in zwei Versionen angeboten, so dass bei der Klausur zwei Gruppen gebildet werden können.

Für alle Aufgaben:

Geraden und Geradengleichungen

Analysis

1. Kriterien zur Kurvendiskussion, Monotonie
2. Linearfaktorzerlegung, Polynomdivision
3. Tangente und Normale
4. Kenntnisse über die wechselseitige Beziehung zwischen dem Graphen einer Funktion und den Graphen ihrer ersten und ihrer zweiten Ableitungsfunktion.
5. Fähigkeiten zur analytischen Beschreibung von Eigenschaften ganzrationaler Funktionen.
6. Die Schülerinnen und Schüler sollten Modellbildungsprozesse im Rahmen der Behandlung der Differentialrechnung in unterschiedlichen Sachkontexten kennen gelernt haben. Darüber hinaus sollten sie gewohnt sein, längere Texte zu lesen und daraus relevante Informationen zu entnehmen (Lesekompetenz). Problemlösestrategien wie z.B. die Berechnung von Näherungswerten oder Entnahme von Lösungen aus Zeichnungen sollten bekannt sein.

Geometrie

1. Kreis und Kreisgleichung (bei beliebigem Mittelpunkt)
2. Tangente und Tangentengleichung beim Kreis
3. Thaleskreis
4. Anfertigung übersichtlicher Zeichnungen (Zirkel wird benötigt)
5. Verständnis für Variationen einer geometrischen Aufgabenstellung

Statistik

1. Schwerpunkt einer Punktwolke
2. Vorhersagen mit Hilfe von Regressionsgeraden
3. Idee der Methode der kleinsten Quadrate (Berechnung von Regressionsgeraden ist nicht erforderlich)

Punktierung:

Vorbemerkung:

Falls Sie als Fachlehrer beabsichtigen, die Ergebnisse an die zuständige Bezirksregierung einzusenden und somit an der Auswertung teilzunehmen, sollten Sie von dem vorgegebenen Punkteraster **nicht** abweichen, also insbesondere keine Zusatzpunkte vergeben.
Zur leichteren Auswertung ist ein Excel-Arbeitsblatt als Anlage hinzugefügt worden. Sie werden gebeten, dieses nach Möglichkeit zu verwenden. Dies wäre für die Auswertung eine große Hilfe.

1. Aufgabe

1a	1b	1c
11	4	3

2. Aufgabe

2a	2b	2c	2d	2e	2f
1	2	5	4	3	3

3. Aufgabe

3a	3b	3c	3d	3e	3f
3	3	3	3	3	3

Für die Aufgaben 3a bis 3d und 3f gilt: 0 Fehler ergibt 3 Punkte, 1 Fehler ergibt 1,5 Punkte, 2 Fehler ergeben 0,5 Punkte, ab 3 Fehler 0 Punkte.
Für die Aufgabe 3e gilt: 0 Fehler ergibt 3 Punkte, 1 Fehler ergibt 1,5 Punkte, ab 2 Fehlern werden 0 Punkte vergeben.
Als Fehler gilt, wenn ein Kästchen fälschlich angekreuzt bzw. nicht angekreuzt ist.

4. Aufgabe

4a	4b	4c	4d
6	4	4	4

5. Aufgabe

5a	5b	5c	5d	5e
5	3	3	3	4

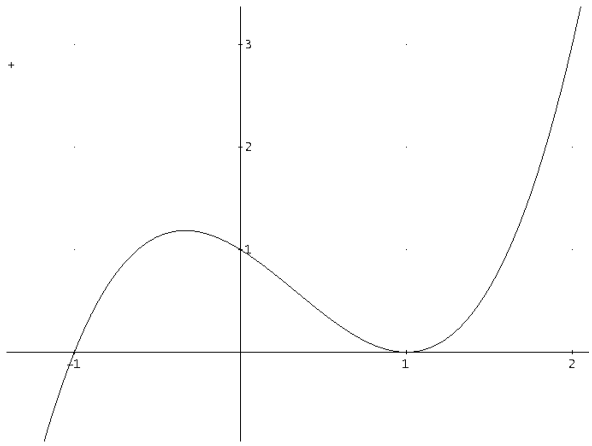
Lösungen

1. Aufgabe

a) Nullstellen: notw. und hinr. Bed. ist $f(x)=0$. Aus $x^3-x^2-x+1=0$ folgt durch systematisches Probieren $x_{N1}=1$. Durch eine Polynomdivision oder durch geeignetes Faktorisieren erhält man den quadratischen Term $x^2-1=0$, aus dem sich die weiteren Nullstellen $x_{N2}=-1$ und $x_{N3}=1$ ergeben. $x_{N1}=1$ ist also eine doppelte Nullstelle. Die möglichen Extremstellen ergeben sich aus $f'(x)=0$, woraus sich $3x^2-2x-1=0$ ergibt. Es ist

$$(x^3-x^2-x+1):(x-1)=x^2-1$$
$$-(x^3-x^2)$$
$$\text{--------}$$
$$-x+1$$
$$-(-x+1)$$
$$\text{-------}$$
$$0$$

$3x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{2}{3}x=\frac{1}{3} \Leftrightarrow (x-\frac{1}{3})^2=\frac{4}{9} \Leftrightarrow |x-\frac{1}{3}|=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=1 \vee x=-\frac{1}{3}$. Die möglichen Extremstellen sind $x_{E1}=1$, $x_{E2}=-\frac{1}{3}$. Es ist $f''(x)=6x-2$, ferner $f''(1)=4>0$ und $f''(-\frac{1}{3})=-4<0$. Daher liegt bei T(1;0) ein Tiefpunkt vor und bei $H(-\frac{1}{3};\frac{32}{27})$ ein Hochpunkt vor. Die mögliche Wendestelle ergibt sich aus $f''(x)=0$, also $x_W=\frac{1}{3}$. Da zusätzlich $f'''(\frac{1}{3})=6\neq 0$ ist, ist $W(\frac{1}{3};\frac{16}{27})$ der Wendepunkt des Graphen von f.



b) Die Steigung der Wendetangente erhält man durch $m_t=f'(\frac{1}{3})=-\frac{4}{3}$. Aus dem Ansatz $n: y=m_n x+b_n$ und mit der Formel $m_n m_t=-1$ erhält man zunächst $n: y=\frac{3}{4}x+b_n$, woraus sich nach Einsetzen der Koordinaten von W $b_n=\frac{37}{108}$ und $n: y=\frac{3}{4}x+\frac{37}{108}$ ergibt.

c) Der Faktor a bewirkt keine Änderung der x-Koordinate des Wendepunktes, da w'' und f'' die gleichen Nullstellen haben (ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten zwar erhalten, kann aber dann wegdividiert werden). Die Ordinate des Wendepunktes W wird mit dem Faktor a multipliziert. Der Wendepunkt wandert also wegen $y_w>0$ mit wachsendem $a>1$ nach oben. Auch die Ableitungen werden mit dem Faktor a multipliziert, sodass die Tangentensteigungen in W dem Betrage nach um den Faktor a größer werden. Die Tangenten werden mit wachsendem $a>1$ immer steiler, sind aber fallend.

2. Aufgabe

Vorbemerkung: In Kontextaufgaben ("Anwendungsaufgaben") wie der Aufgabe 2 müssen im Allgemeinen komplexe Sachverhalte vereinfacht dargestellt werden, damit sie von den Schülern bearbeitet werden können. Zum Kontext der "Anaeroben Schwelle" findet sich eine ausführliche Darstellung beispielsweise in:
Heck, Hermann: Energiestoffwechsel und medizinische Leistungsdiagnostik / Hrsg.: Trainerakademie Köln e.V./ ISBN 3-7780-8081-4

a) Wegen $f(16) = 6{,}872$ beträgt die Laktatkonzentration bei einer Geschwindigkeit von $16\frac{km}{h}$ 6,872 mmol pro Liter Blut.

b) Man entnimmt der Zeichnung den Schnittpunkt zwischen der Parallelen zur x- Achse durch den Punkt $P(0/4)$ und dem Graphen von f. Daraus ergibt sich, dass die anaerobe Schwelle etwa bei einer Geschwindigkeit von $14{,}5\frac{km}{h}$ erreicht wird.

c) Es gilt: $f'(x) = 0{,}09x^2 - 1{,}836x + 9$. Ansatz:
$f'(x) = 0{,}09x^2 - 1{,}836x + 9 = 1 \Leftrightarrow x^2 - \frac{102}{5}x + \frac{800}{9} = 0$. Es folgt: $x \approx 14{,}1 \vee x \approx 6{,}3$
Nach der Definition von Simon ergibt sich als Wert für die anaerobe Schwelle eine Geschwindigkeit von etwa $14{,}1\frac{km}{h}$. $6{,}3\frac{km}{h}$ entfällt als Lösung, da es außerhalb des angegebenen Bereichs liegt.
Anmerkung: $6{,}3\frac{km}{h}$ wäre im Übrigen auch keine sinnvolle Lösung. Bei diesem Wert handelt es sich um die Geschwindigkeit eines zügig gehenden Fußgängers. Ein Sportler wird dabei nicht bereits die anaerobe Schwelle erreichen.

d) Zu bestimmen sind die Abszissen von Hoch- und Tiefpunkt des Graphen.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}09x^2 - 1{,}836x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 20{,}4x + 100 = 0$. Es folgt: $x \approx 8{,}19 \vee x \approx 12{,}21$
Aus $f''(x) = 0{,}18x - 1{,}836$ ergibt sich: $f''(8{,}19) < 0$ und $f''(12{,}21) > 0$. Die Laktatkonzentration nimmt also im Bereich von ca. $8{,}19\frac{km}{h}$ bis $12{,}21\frac{km}{h}$ ab. Eleganter ist der Ansatz: $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0{,}09x^2 - 1{,}836x + 9 < 0 \Leftrightarrow \ldots$ Dies führt zu: $8{,}19 < x < 12{,}21$.

e) Gesucht ist die Wendestelle der Funktion f. Falls den Schülerinnen und Schülern das Symmetrieverhalten einer kubischen Funktion bekannt ist, kann der gesuchte Wert von $10{,}2\frac{km}{h}$ direkt aus den Werten aus Teil d) errechnet werden. Sonst gilt:
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}18x - 1{,}836 = 0 \Leftrightarrow x = 10{,}2$ und $f'''(x) = 0{,}18 \neq 0$ für alle x.

f) Auf Grund der Informationen im Text gibt es zwei Möglichkeiten, den Trainingszustand zu vergleichen: Nach dem Verfahren aus b) lässt sich deutlich sehen, dass der Sportler B besser trainiert ist. Die Zeichnung liefert einen Wert von etwa $16{,}5\frac{km}{h}$ für die anaerobe Schwelle.
Wegen des fehlenden Funktionsterm lässt sich die anaerobe Schwelle nach der Definition von Simon nicht berechnen. Aber eine zeichnerische Lösung durch Eintragen einer Tangente etwa über Parallelverschiebung ergibt auch hier einen deutlich höheren Wert als bei Sportler A (Es reicht eine Lösung!).

3. Aufgabe

Version A

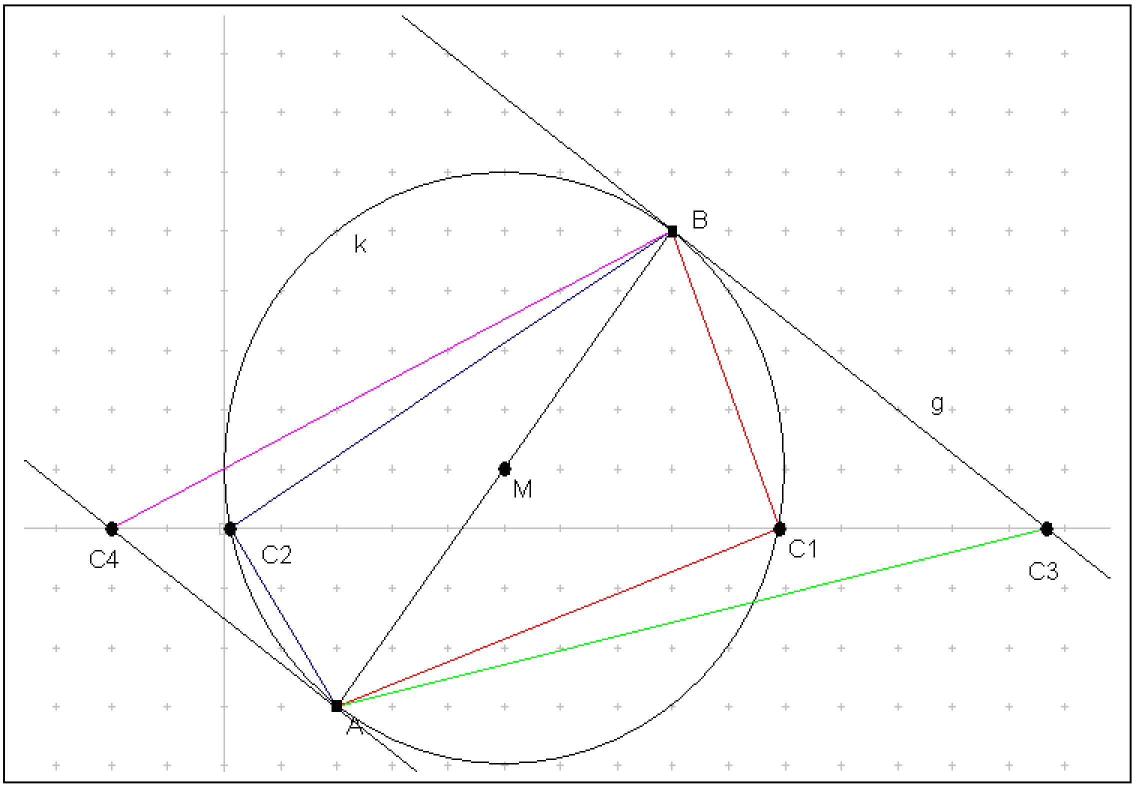
a	b	c	d	e	f
X		X	X		X
	X	X		X	
X	X		X		X
X		X			

Version B

a	b	c	d	e	f
	X	X			
X	X		X		X
X		X			
X		X	X	X	X

4. Aufgabe

a)

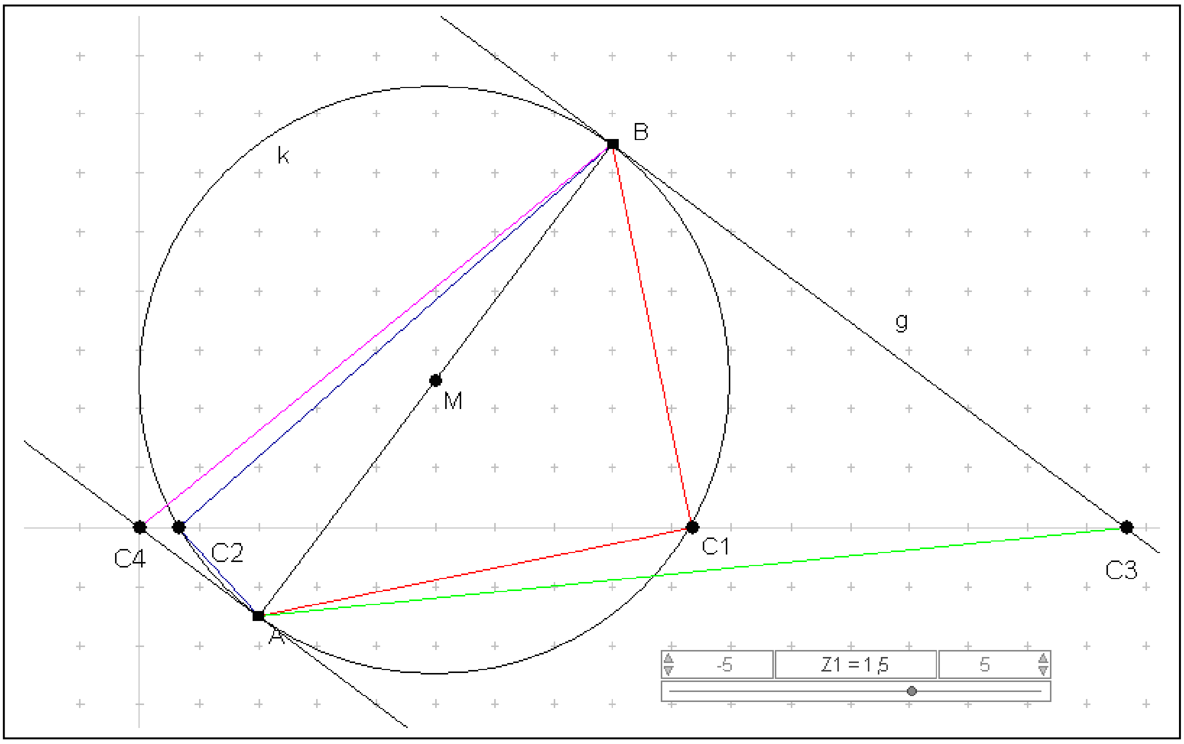


b) Kreismittelpunkt ist der Mittelpunkt $M(5|1)$ der Strecke $\overline{AB}$ mit $A(2|-3)$ und $B(8|5)$. Kreisradius ist der halbe Abstand $\frac{1}{2}\sqrt{(8-2)^2+(5-(-3))^2}=5$ zwischen A und B. Daraus folgt: $k:(x-5)^2+(y-1)^2=5^2$. Die Tangente g geht durch den Punkt B. Dies führt zum Ansatz: $g: y=m\cdot(x-8)+5$. Da die Tangente orthogonal zur Gerade durch A, B steht, ist die Tangentensteigung m der negative Kehrwert von $\frac{5-(-3)}{8-2}=\frac{4}{3}$. Mit $m=-\frac{3}{4}$ ergibt sich: $g: y=-0,75\cdot(x-8)+5=11-0,75x$.

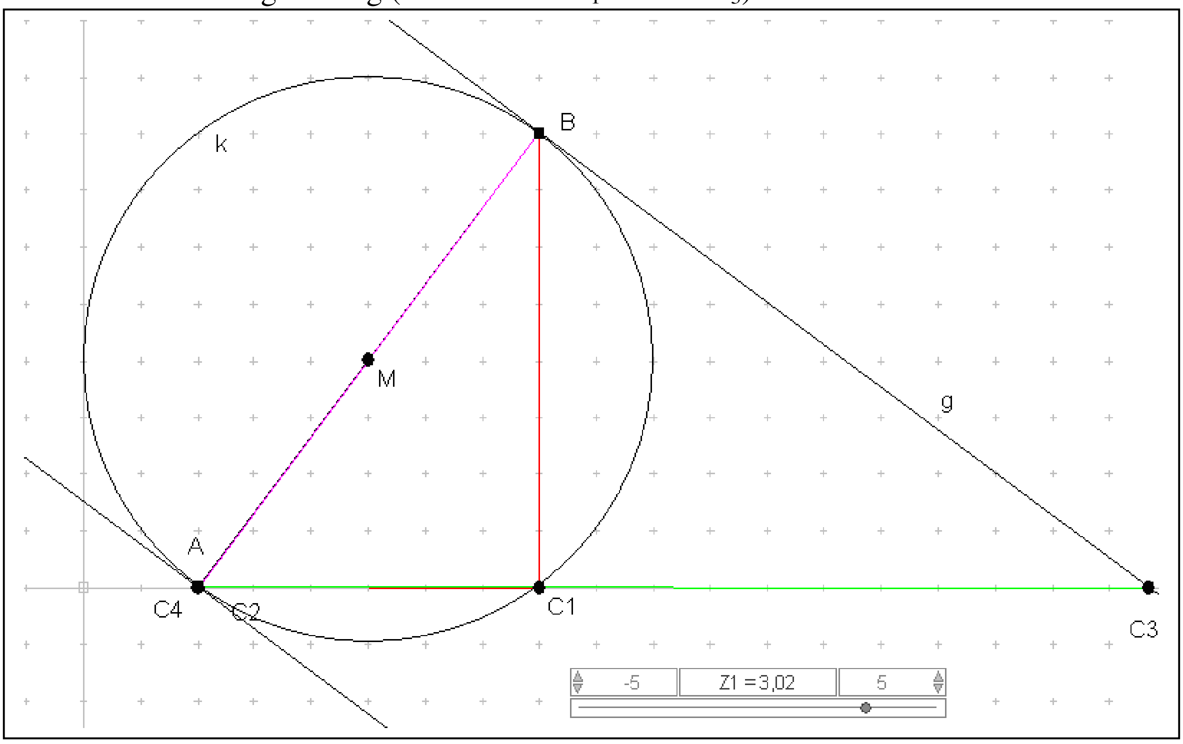
c) Es ist in beiden Fällen $y=0$ zu setzen und nach x aufzulösen. $(x-5)^2+(-1)^2=5^2$ $\Leftrightarrow (x-5)^2=24 \Leftrightarrow x=5+\sqrt{24} \vee x=5-\sqrt{24}$, also $x\approx 0{,}10 \vee x\approx 9{,}90$ (vgl. C1 und C2 in Teil a)), ferner: $0=11-0{,}75x \;\Leftrightarrow x=\dfrac{11}{0{,}75}=14\dfrac{2}{3}$, also $x\approx 14{,}67$ (vgl. C3 in Teil a)).

Nachstehend wird die Maximallösung für die bewusst offene Aufgabenstellung angegeben. Die Abbildungsserie zeigt die Veränderungen für eine Verschiebung um *t* nach oben.

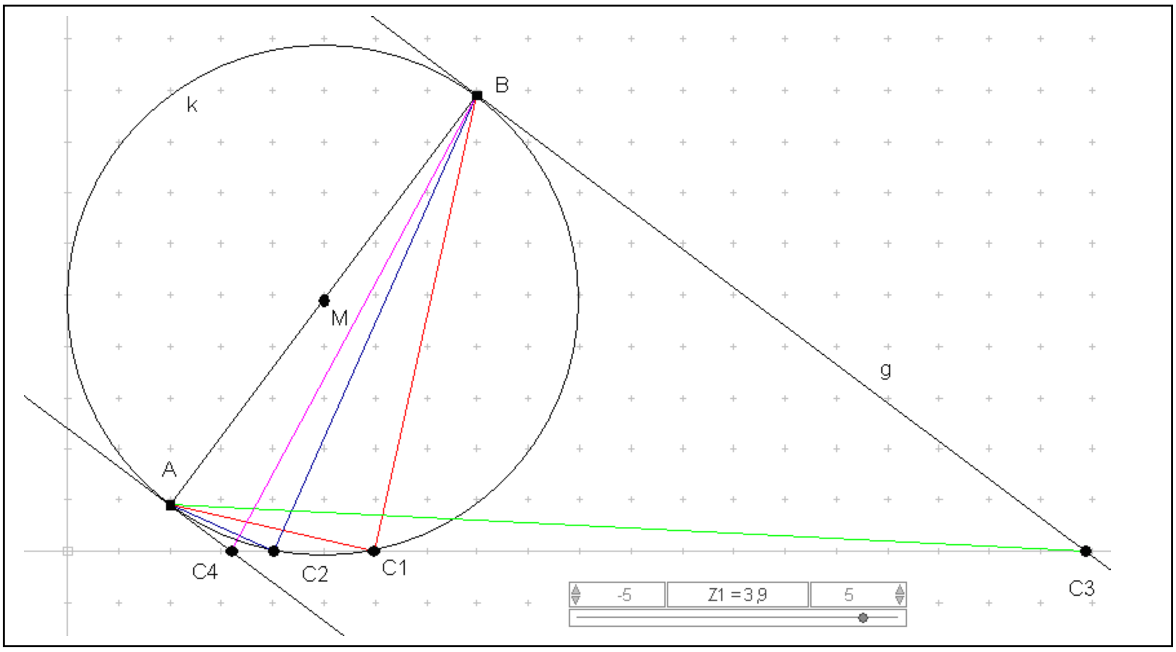
d0) Solange $0\le t<3$ ändert sich die in a) gezeichnete Situation mit 4 Lösungen qualitativ nicht.



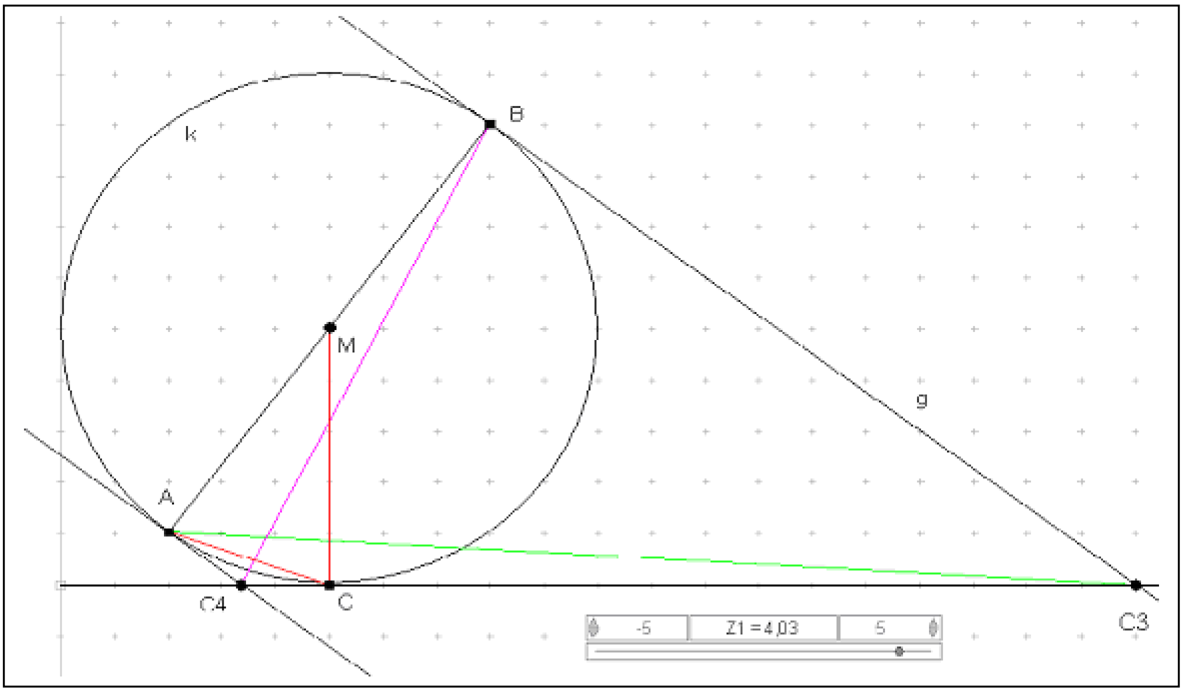
d1) Im Spezialfall $t=3$ wird der ursprüngliche Punkt $A(2|-3)$ auf die x-Achse geschoben. Dadurch schneiden sowohl die Tangente in *A* als auch der Thaleskreis *k* die x-Achse im Punkt *A*, so dass zwei der ursprünglich vier Lösungsdreiecke zu einem Strich entarten. Es bleiben nur 2 Lösungen übrig (Dreiecke ABC_1 und ABC_3).



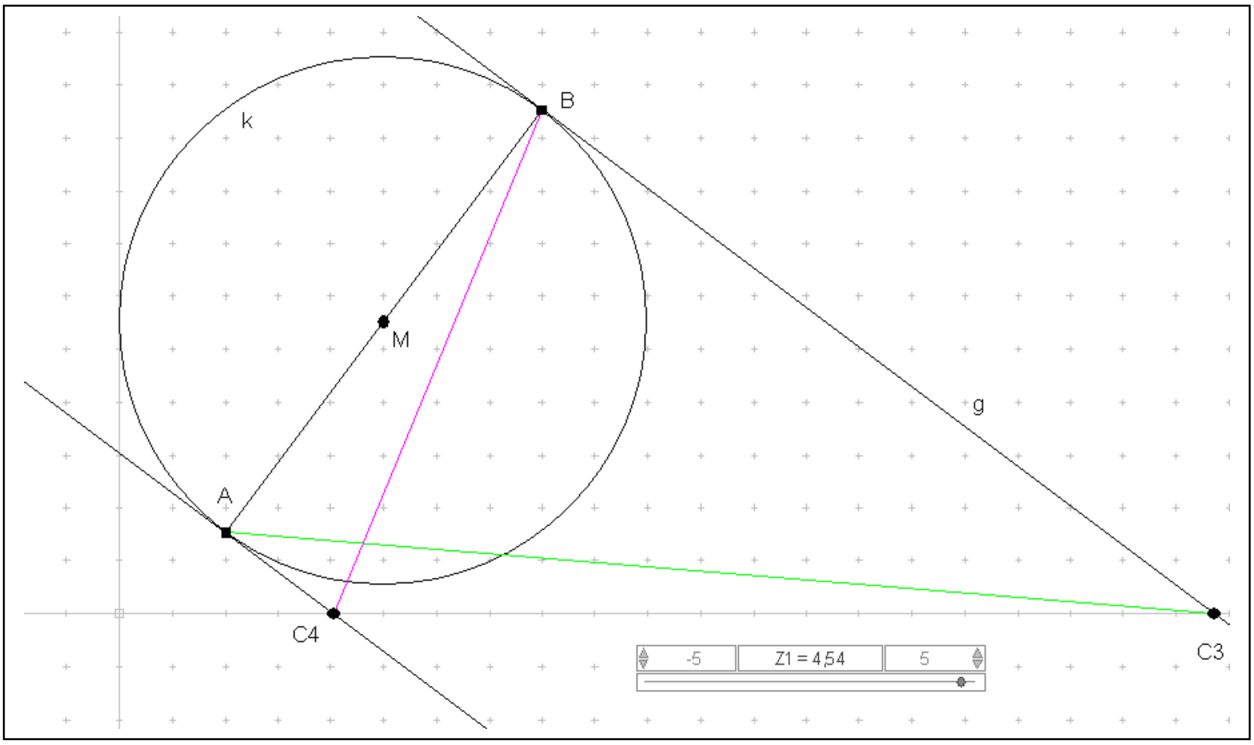
d2) Für Werte $3 < t < 4$ gibt es wieder 4 Lösungen, die jetzt alle gleich orientiert sind. Der Durchmesser $\overline{AB}$ schneidet die x-Achse nicht mehr, liegt aber noch tief genug, damit der Thaleskreis k noch zwei Schnittpunkte mit der x-Achse aufweist.



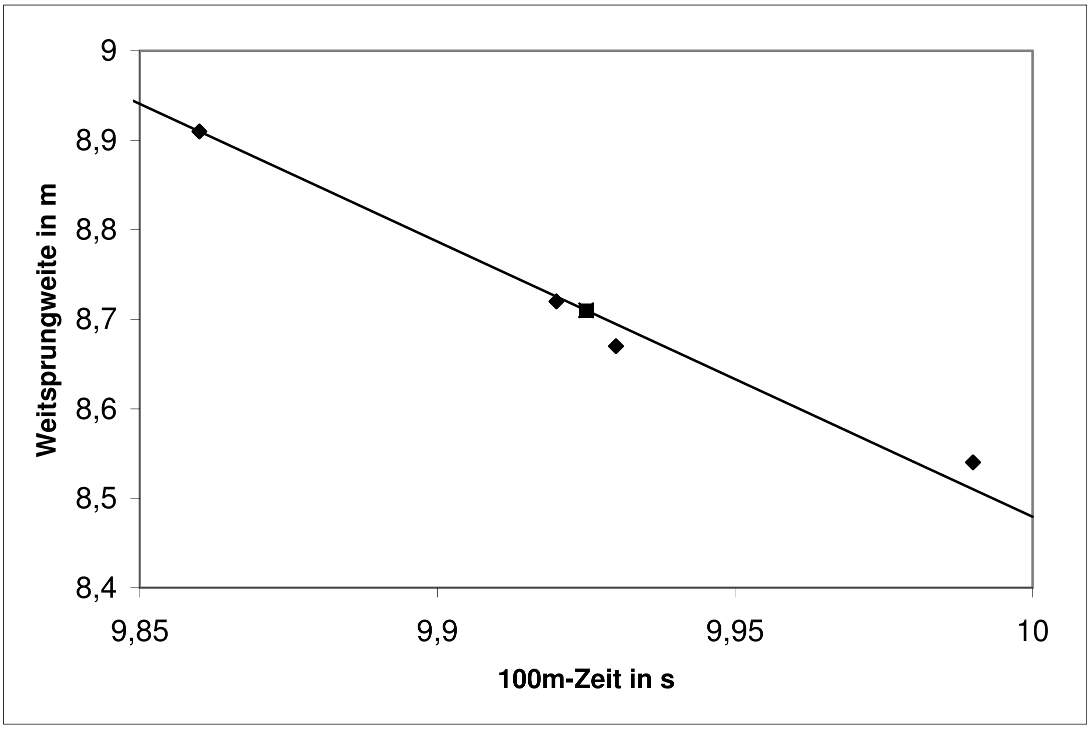
d3) Im Spezialfall $t = 4$ wird der ursprüngliche Mittelpunkt $M(5|1)$ auf die Position $M(5|5)$ verschoben. Da der Radius genau 5 beträgt, berührt der Thaleskreis k die x-Achse im Punkt $C(5|0)$. Somit fallen die beiden Schnittpunkte des Thaleskreises mit der x-Achse in einem Punkt zusammen, so dass nur noch 3 Schnittpunkte bzw. Lösungen vorhanden sind (Dreiecke ABC, ABC_3 und ABC_4).



d4) Für $t > 4$ liegt der Thaleskreis k ganz im 1. Quadranten und schneidet die x-Achse nicht mehr. Die Nullstellen der Tangenten in A resp. B liefern weiterhin noch zwei Lösungen.



5. Aufgabe



a) Die höheren Geschwindigkeiten im Laufen führen vermutlich auch zu höheren Absprunggeschwindigkeiten beim Weitsprung und damit zu größeren Weiten.

b) Es gilt $\bar{x} = 9{,}925$ und $\bar{y} = 8{,}71$. Zeichnung: siehe Lösung zu a). Damit ergibt sich als Steigung der Geraden $\frac{8{,}91 - 8{,}71}{9{,}86 - 9{,}925} \approx -3{,}08$ und damit als Geradengleichung: $y = -3{,}08x + 39{,}25$.

c) Der Ansatz $8{,}62 = -2{,}86x + 37{,}08$ liefert $x \approx 9{,}95$. Der Ansatz $8{,}62 = -3{,}08x + 39{,}25$ führt zu $\mathrm{x} \approx 9{,}95$.

d) Für Laufzeiten größer als 12,97s liefert die Regressiongerade negative Sprungweiten, also keinen sinnvollen Zusammenhang der beiden Größen. Unrealistische Werte erhält man auch noch, wenn die Laufzeit etwas kleiner als 12,97s ist: So erhält man bei $x = 12s$ eine Sprungweite von 2,76m. (Es reicht die Angabe eines konkreten Beipiels.)

e) Die Methode der kleinsten Quadrate: Die gesuchte Regressionsgerade *g*, die durch den Datenschwerpunkt verläuft, besitzt den Funktionsterm $g(x) = m \cdot (x - \bar{x}) + \bar{y}$. m ist nun so zu bestimmen, dass der Term $[y_1 - g(x_1)]^2 + ... + [y_n - g(x_n)]^2$ nach Einsetzen von x_i, y_i minimal wird. Die Methode der kleinsten Quadrate ist überzeugender, denn sie berücksichtigt alle Wertepaare mit gleicher Gewichtung, bei der Methode aus b) erhält ein Wertepaar besonderes Gewicht.

Hinweis zur Rundungsproblematik: Durch Zwischenrunden können unterschiedliche Ergebnisse entstehen. Die Bewertung bleibt dem Fachlehrer je nach den Gepflogenheiten im Unterricht überlassen.