Modelllösungen

Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Nr.		Punkte
1a	Schnittpunkte mit der x-Achse: $x^4 - 8x^3 + 16x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x^2 - 8x + 16) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$ Also $N_1(0 \mid 0)$ und $N_2(4 \mid 0)$. Schnittpunkt S_y mit der y-Achse: $S_y = N_1$	4
1b	$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 32x = 4x \cdot (x^2 - 6x + 8)$ $f''(x) = 12x^2 - 48x + 32$ $f'(0) = 0 \wedge f''(0) = 32 > 0, f(0) = 0$ $f'(2) = 0 \wedge f''(2) = -16 < 0, f(2) = 16$ $f'(4) = 0 \wedge f''(4) = 32 > 0, f(4) = 0$ Damit ergeben sich die Tiefpunkte $T_1(0 \mid 0)$ und $T_2(4 \mid 0)$ und der Hochpunkt $H(2 \mid 16)$.	8
1c	An den Extremstellen der Ableitungsfunktion f' ist die Steigung des Graphen von f extremal, an diesen Stellen liegen Wendestellen der Ausgangsfunktion f vor. f' hat zwei Extremstellen bei $x \approx 0{,}8$ und $x \approx 3{,}2$ (Ablesewerte), f hat daher zwei Wendestellen bei $x \approx 0{,}8$ und $x \approx 3{,}2$.	4
1d1	Es gilt: $f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 8x + 16)$ und damit $a = 16$.	2
1d2	$g_a(x) = x^4 - 8x^3 + ax^2$ $g_a'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 2ax$ $g_a''(x) = 12x^2 - 48x + 2a$ $g_a'''(x) = 24x - 48$ Möglichkeit 1: Die notwendige Bedingung $g_a''(x) = 0$ für Wendestellen liefert: $x_1 = 2 + \sqrt{4 - \frac{a}{6}}$ und $x_2 = 2 - \sqrt{4 - \frac{a}{6}}$. Die geforderte Bedingung erfüllt nur x_2 mit $a = 0$. Möglichkeit 2: $g_a''(0) = 2a$ $g_a''(0) = 0 \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ Da zusätzlich $g_a'''(0) = -48 \neq 0$ gilt, ist die hinreichende Bedingung erfüllt und damit $x = 0$ Wendestelle.	6
	Summe:	**24**

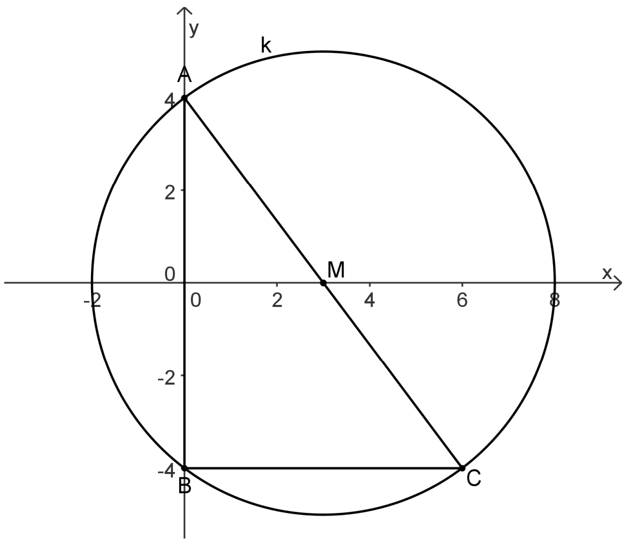
Nr.		Punkte
2a	$k'(x) = -320x^2 + 32x + \frac{48}{5}$ $k''(x) = -640x + 32$	2
	Gesucht ist das Maximum von k. Mit der notwendigen Bedingung $k'(x) = 0$ folgt: $-320x^2 + 32x + \frac{48}{5} = 0$ Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{20} \approx -0{,}13$ und $x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{20} \approx 0{,}23$ Da x_1 offensichtlich nicht die gesuchte Maximalstelle ist, wird x_2 als Nullstelle von k' mit k'' überprüft. Wegen $k''(0{,}23) = -115{,}2 < 0$ liegt an der Stelle x_2 ein relatives Maximum vor. Für den gegebenen Sachzusammenhang handelt es sich offensichtlich auch um das absolute Maximum.	6
	Wegen $k(0{,}23) \approx 4{,}36$ beträgt der maximale Kornertrag ungefähr 4,36 Tonnen pro Hektar.	2
2b	Mit der notwendigen Bedingung $k''(x) = 0$ für eine Wendestelle folgt: $-640x + 32 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{20} = 0{,}05$ Da zusätzlich $k'''(0{,}05) = -640 \neq 0$ gilt, ist 0,05 die Wendestelle von k. Steigung an der Wendestelle: $k'(0{,}05) = \frac{52}{5} = 10{,}4$	5
	Die maximale Zuwachsrate des Kornertrags bei Erhöhung der Düngermittelmenge liegt bei einer Menge von 0,05 Tonnen Dünger pro Hektar vor. Diese Zuwachsrate beträgt 10,4 $\frac{\text{t Raps pro ha}}{\text{t Dünger pro ha}}$ (also 10,4 $\frac{\text{t Raps}}{\text{t Dünger}}$).	3
2c	Die Schüler können auf einen der folgenden Aspekte hinweisen: Der Bereich für $x < 0$ ist nicht sinnvoll, weil die Düngermenge nicht negativ sein kann. Der Funktionsgraph kommt aus dem Positiven und verschwindet im Negativen (negativer Koeffizient vor x^3). Da der Kornertrag nicht negativ sein kann, ist der Bereich ab der positiven Nullstelle in diesem Sachzusammenhang ebenfalls nicht sinnvoll.	3
2d	$g(x) = 225 \cdot k(x) - 500 \cdot x$	3
	Summe:	**24**

<table>
<tr><th>Nr.</th><th></th><th>Punkte</th></tr>
<tr><td>3a</td><td>
Da $\left|\overline{MA}\right| = \left|\overline{MB}\right| = \left|\overline{MC}\right| = 5$ gilt, ist M der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC.

Andere Möglichkeiten:

Anhand der Koordinaten erkennt man, dass M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ ist. Da das Dreieck ABC rechtwinklig ist, ist M nach der Umkehrung des Satzes von Thales der Umkreismittelpunkt.

Anhand der Koordinaten erkennt man, dass M der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ und damit der Umkreismittelpunkt ist.



$k:(x-3)^2 + y^2 = 5^2$
</td><td>3

3

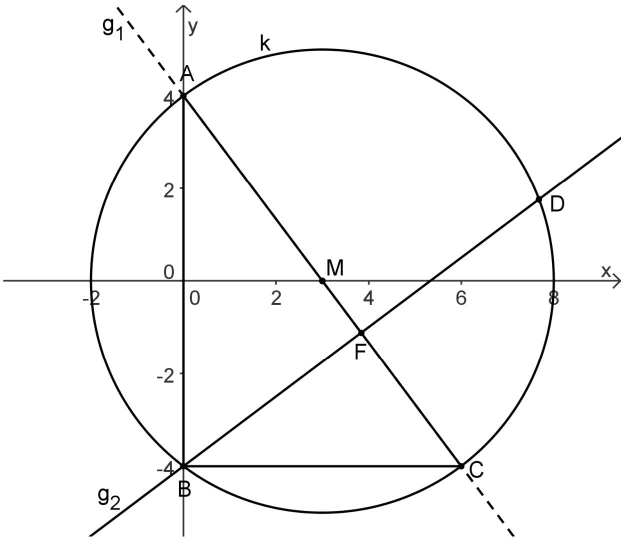
2</td></tr>
<tr><td>3b</td><td>
Gleichung von g_1:
$m_1 = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{-4-4}{6-0} = -\dfrac{4}{3}$
Mit der y-Koordinate von A als y-Achsenabschnitt erhält man: $g_1 : y = -\frac{4}{3}x + 4$

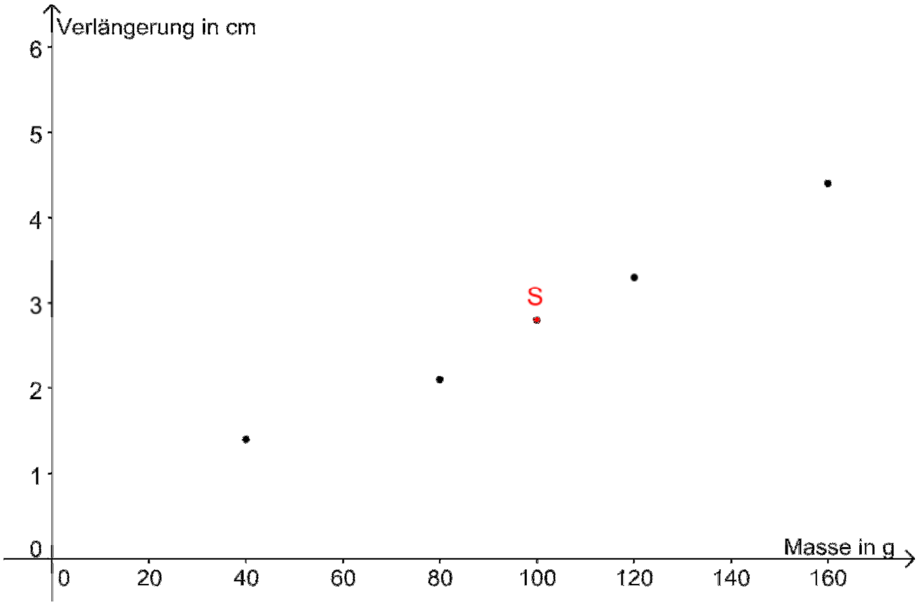
Gleichung von g_2:
$m_2 = -\dfrac{1}{m_1} = \dfrac{3}{4}$
Mit der y-Koordinate von B als y-Achsenabschnitt erhält man: $g_2 : y = \frac{3}{4}x - 4$

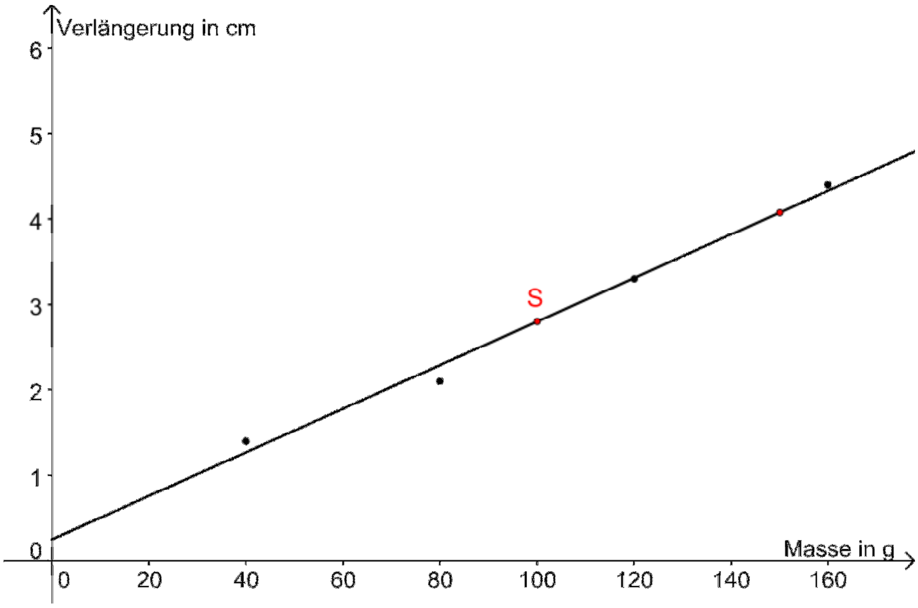
Schnittpunkt:
$-\frac{4}{3}x + 4 = \frac{3}{4}x - 4 \Leftrightarrow x = \frac{96}{25} = 3{,}84$
$y = \frac{3}{4} \cdot \frac{96}{25} - 4 = -\frac{28}{25} = -1{,}12$
Damit folgt: $F\left(3{,}84 \middle| -1{,}12\right)$
</td><td>3

3

4</td></tr>
</table>

Nr.		Punkte
3c		2
	Die Gerade g_1 verläuft durch den Mittelpunkt von k und ist damit eine Symmetrieachse des Kreises. Da B auf k liegt, muss dann auch das Spiegelbild D von B auf k liegen.	2
	Die Koordinaten von D erhält man, wenn man die Schnittpunkte der Geraden g_2 mit dem Kreis k berechnet.	2
	Summe:	**24**

<table>
<tr><th>Nr.</th><th></th><th>Punkte</th></tr>
<tr><td>3a</td><td>Berechnung des Datenschwerpunktes:
$\overline{x} = \dfrac{40+80+120+160}{4} = 100$ und $\overline{y} = \dfrac{1{,}4+2{,}1+3{,}3+4{,}4}{4} = 2{,}8$
Also ist der Datenschwerpunkt $S\left(100 \middle| 2{,}8\right)$.

</td><td>3

3</td></tr>
<tr><td>3b</td><td>Schätzwertberechnung:
$y = 0{,}0255 \cdot 150 + 0{,}2500 = 4{,}075$
Die Feder sollte demnach um etwa 4,1 cm verlängert werden, wenn man ein Gewicht von 150 g anhängt.

</td><td>2

2</td></tr>
</table>

3c	Wenn kein Gewicht an der Feder hängt, wird sie nicht verlängert. Somit kann man den Punkt $(0\|0)$ als gesichert annehmen. Daraus ergibt sich der Ansatz $y = m \cdot x$.	3
3d	Der Term stellt die Summe der quadratischen Abweichungen der y-Werte der Originaldaten von den y-Werten der Schätzgeraden zu $y = m \cdot x$ dar. Zur Bestimmung der Steigung m muss diese Summe minimiert werden.	3
3e	Mit der notwendige Bedingung $S'(m) = 0$ für eine Minimalstelle folgt: $96\,000 \cdot m - 2\,648 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2\,648}{96\,000} \approx 0{,}028$ Da es sich um eine nach oben geöffnete Parabel 2. Ordnung handelt, liegt an der Stelle $m \approx 0{,}028$ tatsächlich ein Minimum vor. $S(0{,}028) = 0{,}108$ Der Tiefpunkt T hat näherungsweise die Koordinaten $T(0{,}028\|0{,}108)$.	5
	Die 1. Koordinate des Tiefpunktes gibt den Wert der Steigung m an, für den die betrachtete Schätzgerade im Sinne der Methode der kleinsten Abstandsquadrate optimal ist. Die 2. Koordinate des Tiefpunktes ist die Summe der quadratischen Abweichungen in y-Richtung bzgl. dieser Geraden.	3
	Summe:	**24**