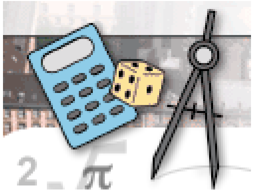
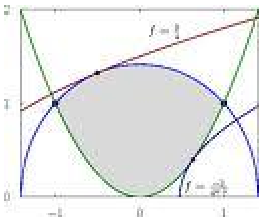


Reader

Vergleichsklausuren 11 der Bezirksregierung Düsseldorf

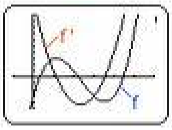


2000-2009

mit den relevanten Aufgabenteilen zusammengestellt von

M.Walther

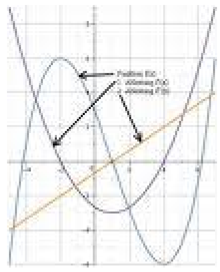
$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\
&= a\cdot(a+b)+b\cdot(a+b)\\
&= a^2+ab+ba+b^2\\
&= a^2+2ab+b^2\\
(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\
&= a\cdot(a-b)-b\cdot(a-b)\\
&= a^2-ab-ba+b^2\\
&= a^2-2ab+b^2\\
(a+b)(a-b) &= a(a-b)+b(a-b)\\
&= a^2-ab+ba-b^2\\
&= a^2-b^2
\end{aligned}
$$



Inhaltsverzeichnis:

2. Punktsymmetrisch zum Ursprung

Ein Funktionsgraph heißt punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn für alle $x \in D$ gilt, dass $f(-x) = -f(x)$ ist.



1. Achsensymmetrisch zur y-Achse

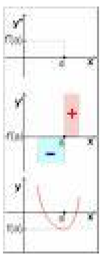
Ein Funktionsgraph heißt achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn für alle $x \in D$ gilt, dass $f(x)=f(-x)$ ist.

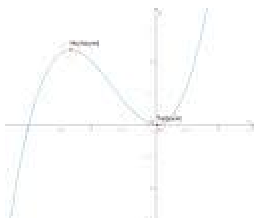
Lösungen zu den Klausuraufgaben gibt es unter:

http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/structure/sekundar2/vergleichsarbeiten.php

oder

http://www.walther-mathematik.de/jahrgangsstufe11/index11.htm





Tiefpunkt = relatives Minimum
hinreichende Bedingung:
$f'(x_1) = 0 \wedge f''(x_1) > 0$

Hinreichende Bedingung für Wendepunkte $f''(x_W)=0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

Hochpunkt = relatives Maximum
hinreichende Bedingung:
$f'(x_1) = 0 \wedge f''(x_1) < 0$

Nur für den Dienstgebrauch!

Anforderungen im Jahr 2010:

Analysis:

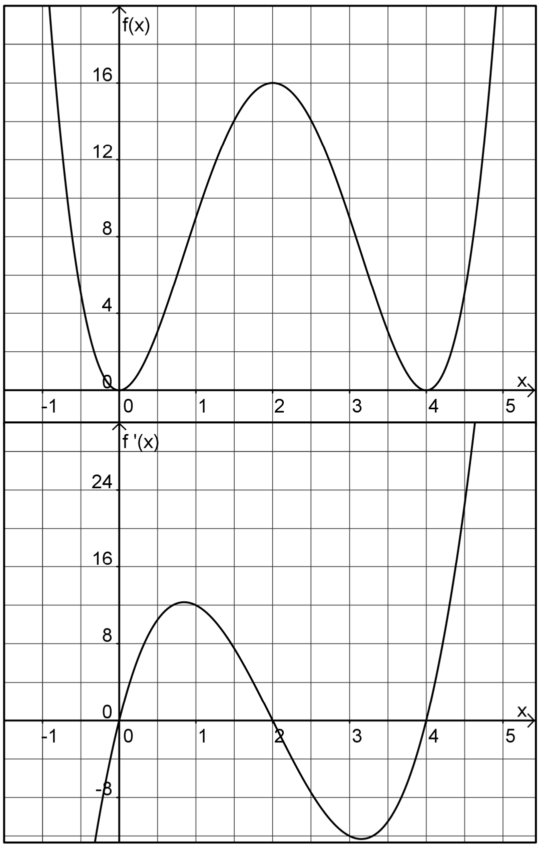
Themengebiet	Aufgaben
Geraden und Geradengleichungen	- Gerade durch zwei Punkte bestimmen - Steigungswinkel bestimmen - Orthogonalität und Parallelität nachweisen
Nullstellen ganzrationaler Funktionen bestimmen	- Nullstellen in faktorisierter Form erkennen - Ausklammern von Termen
Funktionsuntersuchung einer ganzrationalen Funktion 3.Grades	- Symmetrie - Monotonie - Punkte mit den KOA - Extrempunkte - Wendepunkte
Tangenten und Normalen an einen Funktionsgraphen	- Tangentengleichung und Normalen-gleichung an einen Funktionsgraphen bestimmen
Verschieben oder Strecken von Funktionsgraphen	- Parabeln strecken/stauchen - Funktionen im Koordinatensystem nach oben/unten verschieben
Zusammenhänge zwischen Graphen der Funktion und deren Ableitungsfunktionen	- Erstellung des Graphen der Ableitungsfunktion - Erstellung des Graphen der Ausgangsfunktion
Differentialrechnung in Sachzusammenhängen	- Angabe der durchschnittlichen und momentanen Änderungsrate - Interpretation von Extrempunkten - Interpretation von Wendepunkten

Im Jahr 2010 wird es zwei Aufgaben geben, eine innermathematische und eine Analysisaufgabe mit einem außermathematischen Kontextbezug.

Vergleichsklausur 2009 für die Jahrgangsstufe 11

Aufgabe 1

Die folgenden Abbildungen zeigen den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2$ und den Graphen der Ableitungsfunktion f'.



a) *Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.*

b) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von f in $T_1(0\,|\,0)$ und $T_2(4\,|\,0)$ Tiefpunkte und in $H(2\,|\,16)$ einen Hochpunkt hat.*

c) *Leiten Sie aus dem Graphen der Ableitungsfunktion f' eine Aussage über die Anzahl der Wendestellen von f her und lesen Sie diese Stellen näherungsweise am Graphen ab.*

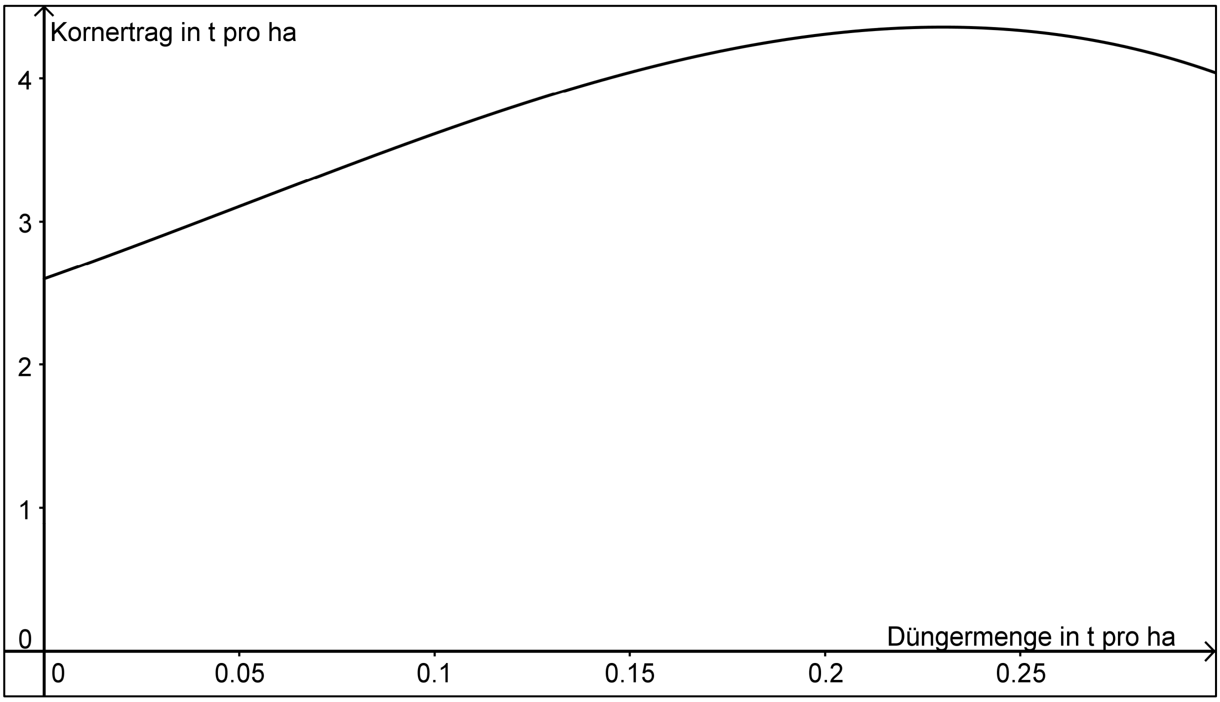
d) Betrachten Sie nun die Funktionen g_a mit $g_a(x) = x^2 \cdot (x^2 - 8x + a)$. Setzt man hier für a verschiedene Zahlen ein, so erhält man jedes Mal eine andere Funktionsgleichung.

d₁) *Bestimmen Sie die Zahl a so, dass die Funktion g_a mit der Funktion f übereinstimmt.*

d₂) *Ermitteln Sie a so, dass $x = 0$ eine Wendestelle des Graphen von g_a ist.*

Aufgabe 2

Wird Raps mit Stickstoff gedüngt, so nimmt der Kornertrag zunächst mit steigender Düngermenge zu. Wird die optimale Düngermenge überschritten, so wird der Ertrag wieder geringer. In dem folgenden Diagramm ist näherungsweise das Ergebnis von Versuchen dargestellt, die dazu in den Jahren 1998 bis 2005 in Hessen durchgeführt wurden.



Der abgebildete Graph gehört zur Funktion k mit

$$k(x) = -\tfrac{320}{3}x^3 + 16x^2 + \tfrac{48}{5}x + \tfrac{13}{5}.$$

Dabei bezeichnet x die Düngermenge in Tonnen pro Hektar und $k(x)$ den Kornertrag in Tonnen pro Hektar bei der Düngermenge x. Mit dieser Funktion ist es nun möglich, die folgenden Fragestellungen zu bearbeiten.

a) *Zeigen Sie rechnerisch, dass bei einer Düngermenge von annähernd 0,23 Tonnen pro Hektar der maximale Kornertrag erzielt wird.*

Berechnen Sie näherungsweise den maximalen Kornertrag pro Hektar.

b) *Berechnen Sie die Wendestelle der Funktion k und die Steigung an der Wendestelle.*

Interpretieren Sie die berechneten Werte im Sachzusammenhang.

c) *Entscheiden Sie begründet, ob die Funktion k auch außerhalb des in der Abbildung dargestellten Bereiches immer eine sinnvolle Beschreibung des Zusammenhangs von Düngermenge und Kornertrag liefert.*

d) Ein Landwirt erzielt pro Tonne Raps einen Verkaufspreis von 225 €, die Kosten pro Tonne Stickstoffdünger betragen 500 €.

Ermitteln Sie die Gleichung einer Funktion g, die den Gewinn pro Hektar in Abhängigkeit von der aufgebrachten Düngermenge pro Hektar beschreibt.

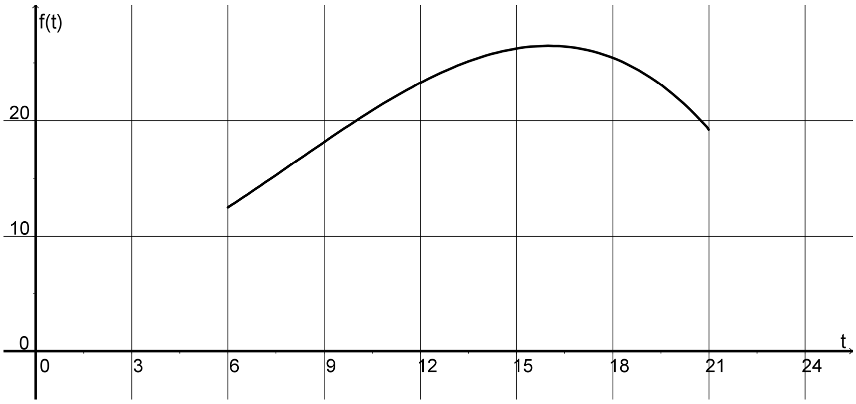
Weitere Betriebskosten sollen dabei unberücksichtigt bleiben.

Vergleichsklausur 2008 für die Jahrgangsstufe 11

Aufgabe 1

In modernen Wetterstationen werden rund um die Uhr Daten über die Lufttemperatur (kurz: Temperatur) durch elektronische Messautomaten erfasst.

Für $6 \le t \le 21$ stellt der Graph der Funktion f modellhaft den Temperaturverlauf während eines bestimmten Tages in der Zeit von 6.00 Uhr bis 21.00 Uhr dar (siehe Abbildung).



Es gilt:

$$f(t) = -0{,}01 \cdot t^3 + 0{,}24 \cdot t^2 + 6 \ ,$$

wobei t die Uhrzeit in Stunden angibt und $f(t)$ die Temperatur in °C.

a) Berechnen Sie die Temperatur zu Beginn und am Ende des vorgegebenen Zeitintervalls.

Berechnen Sie die Uhrzeit, zu der der Tageshöchstwert erreicht wird, und prüfen Sie, ob es sich um einen Sommertag handelt.

(Sommertag: Tag, an dem die Höchsttemperatur 25 °C übertrifft)

b) Der Wendepunkt W hat die Koordinaten $W\left(8 \middle| f(8)\right)$. Diese Information kann im Folgenden ohne Nachweis verwendet werden.

Berechnen Sie die Steigung der Wendetangente des Graphen von f. Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Sachzusammenhang.

c) Um 10 Uhr beträgt die Temperatur 20 °C.

Ermitteln Sie in der Abbildung auf diesem Arbeitsblatt zeichnerisch näherungsweise den Zeitraum, in dem die Temperatur mindestens 20 °C beträgt.

Bei der rechnerischen Ermittlung dieses Zeitraumes führt der Ansatz $f(t) = 20$ zur Gleichung

$$t^3 - 24 \cdot t^2 + 1400 = 0 \ .$$

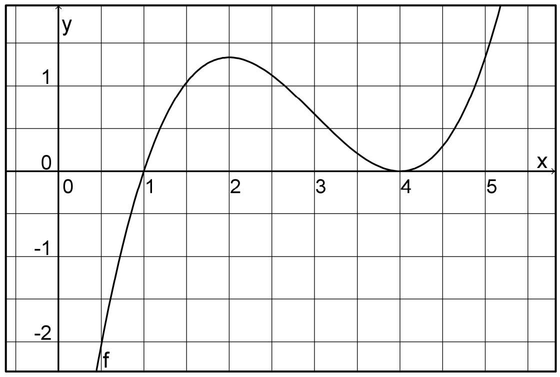
Diese Gleichung muss nicht hergeleitet werden.

Berechnen Sie die exakten Lösungen dieser Gleichung und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.

Aufgabe 2

Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x-\frac{16}{3}\ .$$

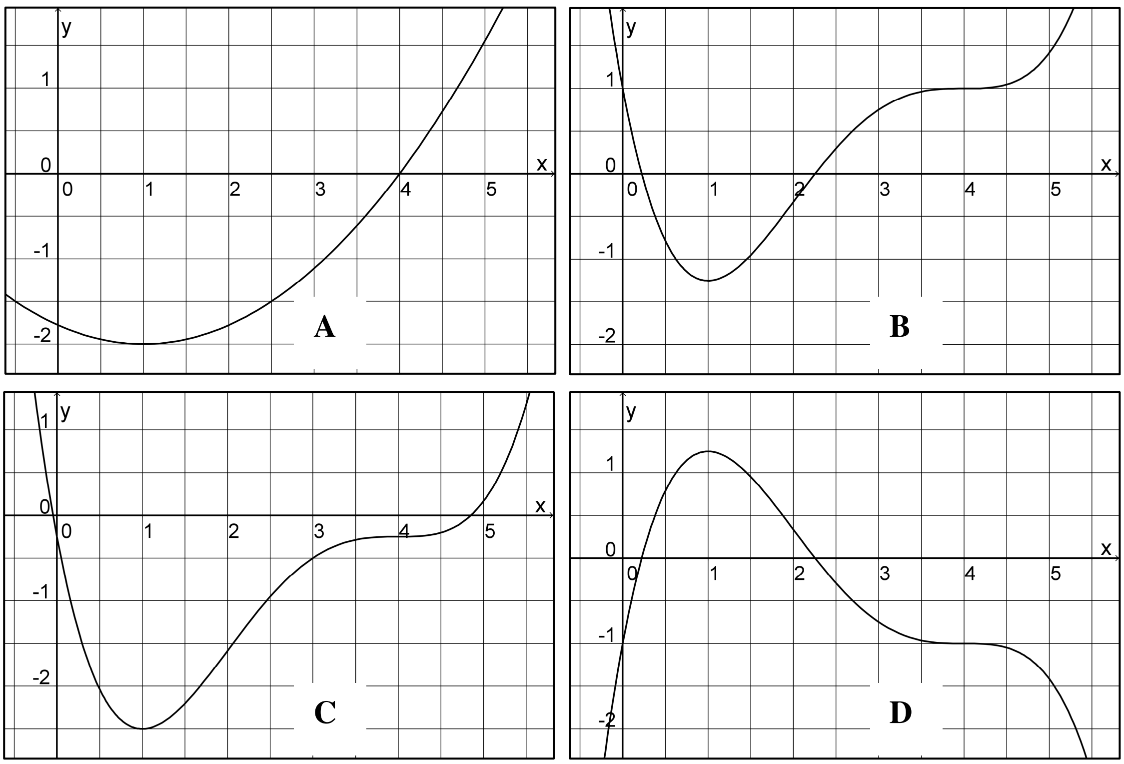


a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass $E_1\left(2\,\middle|\,\frac{4}{3}\right)$ und $E_2\left(4\,|\,0\right)$ Extrempunkte des Graphen von f sind.

b) Berechnen Sie den Wendepunkt des Graphen.

c) Die Funktion f ist die Ableitung einer Funktion F.

Entscheiden Sie, bei welchen der folgenden Graphen es sich <u>nicht</u> um den Graphen von F handeln kann. Begründen Sie in diesen Fällen, warum es sich nicht um den Graphen von F handeln kann. (Ein Gegenargument reicht jeweils aus.)



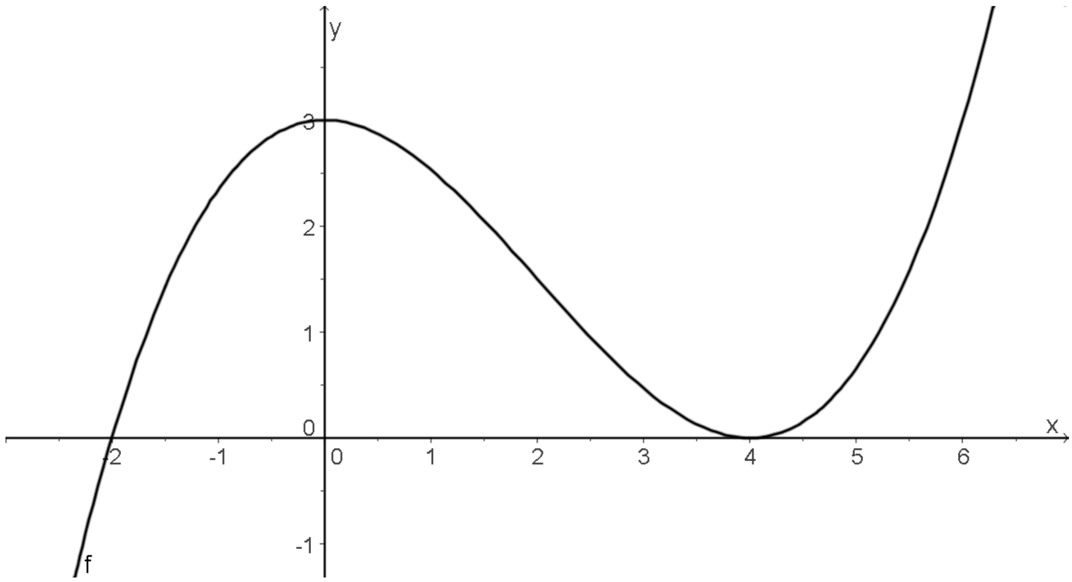
d) Weisen Sie nach, dass $t(x)=\frac{5}{4}x-\frac{16}{3}$ die Gleichung einer Tangente an den Graphen von f ist.

Vergleichsklausur 2006 für Jahrgangsstufe 11

1. Aufgabe

Die folgende Zeichnung zeigt den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{3}{32}x^3 - \frac{9}{16}x^2 + 3 .$$



a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph in $(0|3)$ und $(4|0)$ Extrempunkte hat.

b) Berechnen Sie den Wendepunkt des Graphen.
Begründen Sie, dass jede ganzrationale Funktion dritten Grades genau einen Wendepunkt hat.

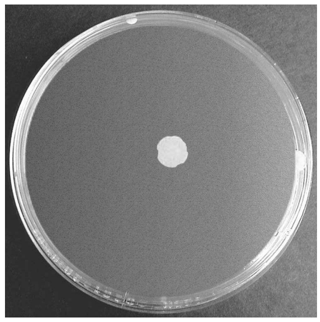
c) Die Tangente an den Graphen an der Stelle $x = 2$ schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

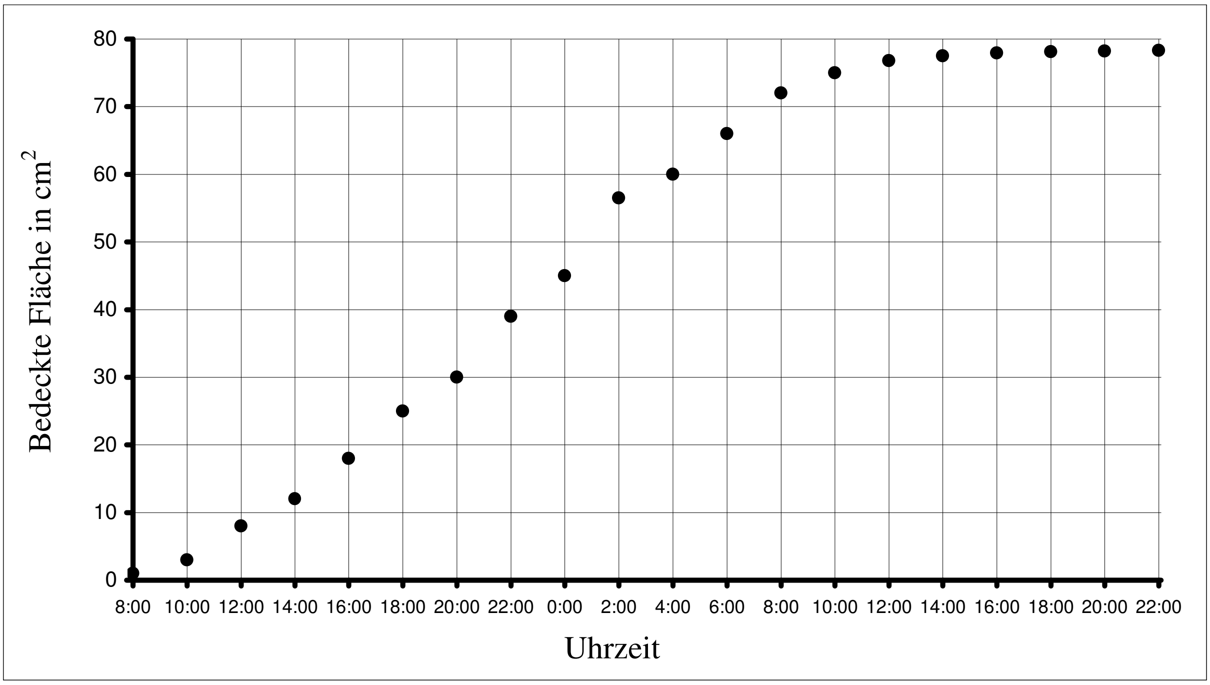
d) Zeichnen Sie die Gerade durch die beiden Extrempunkte in die obige Zeichnung ein.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass diese Gerade nicht mit der Wendetangente übereinstimmt.

e) Der Graph schließt zwischen $x = 0$ und $x = 4$ mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein.
Ermitteln Sie die Größe dieser Fläche auf möglichst geschickte Weise.

2. Aufgabe

Ein Wissenschaftler hat im Rahmen einer Forschungsarbeit das Wachstum einer Bakterienkultur in einem Gefäß beobachtet. Alle zwei Stunden wurde von ihm die Größe der von den Bakterien bedeckten Fläche gemessen.
Seine Messwerte sind in folgendem Koordinatensystem dargestellt:





Der Wissenschaftler modelliert die Messreihe durch die folgende Funktion:

$$A(t) = -0{,}005\,t^3 + 0{,}2\,t^2 + 0{,}9\,t + 1$$

$A(t)$: Fläche (Einheit: cm^2)

t: Zeit seit dem Beobachtungsbeginn um 8.00 Uhr (Einheit: h)

Mit dieser Funktion ist es nun möglich, die Fragestellungen in den Aufgaben a) bis c) bearbeiten.

a) Berechnen Sie die Größe der um 5.00 Uhr nachts von Bakterien bedeckten Fläche.

b) Bestimmen Sie die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit der Bakterienkultur (in $\frac{cm^2}{h}$) zwischen dem Beobachtungsbeginn und 5.00 Uhr nachts.

c) Wann ist die Wachstumsgeschwindigkeit genauso groß wie zu Beginn der Beobachtung?
Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Bakterienkultur am schnellsten wächst.
Bis zu welchem Zeitpunkt wächst im vorgegebenen Modell die bedeckte Fläche?

d) Ein Kollege des Wissenschaftlers ist der Meinung, dass die zur Modellierung verwendete Funktion das Versuchsergebnis nicht angemessen beschreibt.
Geben Sie mindestens einen Grund für die Kritik des Kollegen an.

Vergleichsklausur 2005 für Klassenstufe 11

1. Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte und den Wendepunkt des Graphen von f. Skizzieren Sie den Graphen im Intervall von –1 bis 2.
b) Berechnen Sie die Gleichung der Normale im Wendepunkt.
c) Wir betrachten nun die Funktion mit $w(x) \quad a \quad f(x)$ mit $a \quad 1$. Wie verändern sich die Lage des Wendepunktes und der Verlauf der Wendetangente, wenn a wächst? Geben Sie eine Begründung an!

2. Aufgabe

In der Sportmedizin kennt man den Begriff der *anaeroben Schwelle*. Dieser Begriff lässt sich vereinfacht folgendermaßen erklären:

Die Energiebereitstellung für eine länger andauernde Bewegung bezeichnet man als *aerob*, wenn durch die Atmung so viel Sauerstoff aufgenommen wird, wie der Körper zur Bewegung benötigt. Steht – etwa bei einer intensiven Belastung – nicht genügend Sauerstoff zur Verfügung, so bildet der Körper zunehmend Laktat (Milchsäure) und die Bewegung wird immer schwerer. Die Energiegewinnung ohne Sauerstoff („anaerob“) spielt dann eine maßgebliche Rolle. Die Grenze zwischen diesen beiden Zuständen heißt *anaerobe Schwelle*.

Die anaerobe Schwelle kann dazu benutzt werden, den Trainingszustand eines Sportlers zu untersuchen. Ein gängiges Verfahren zur Bestimmung der anaeroben Schwelle nutzt die Laktatkonzentration im Blut. Bei der Untersuchung läuft der Sportler auf einem Laufband. Die Geschwindigkeit dieses Laufbandes wird in gleichen Zeitabständen gleichmäßig erhöht. Dabei wird immer wieder die Laktatkonzentration im Blut gemessen. Je höher die Geschwindigkeit ist, bei der der Sportler die anaerobe Schwelle erreicht, desto besser ist sein Trainingszustand.

Bei einem bestimmten Sportler A wird diese Untersuchung durchgeführt. Dabei ergibt sich aus den Messwerten näherungsweise die in Abbildung 1 gezeichnete Laktatkurve. Diese kann für $7 \le x \le 18$ durch folgende Gleichung dargestellt werden

$$f(x) = 0{,}03x^3 - 0{,}918x^2 + 9x - 25.$$

x bezeichnet dabei die Laufgeschwindigkeit in $\frac{km}{h}$, f(x) die Laktatkonzentration in Millimol pro Liter.

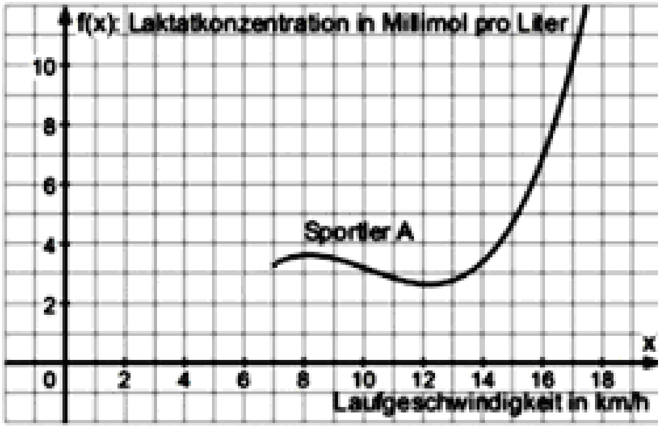


Abbildung 1

a) Berechnen Sie die Laktatkonzentration, die sich für Sportler A bei $16\frac{km}{h}$ ergibt!

b) Zur Berechnung der anaeroben Schwelle gibt es zwei unterschiedliche mathematische Modelle. Nach dem Mader-Modell (1976) wird die anaerobe Schwelle bei einer Laktatkonzentration von 4 Millimol pro Liter erreicht. Bestimmen Sie aus der Zeichnung einen Näherungswert für die Geschwindigkeit, bei der die anaerobe Schwelle überschritten wird.

c) Nach dem Modell des Sportmediziners G. Simon (1981) findet man die anaerobe Schwelle, indem man den Punkt der Kurve ermittelt, in dem die Steigung 1 ist. Bestimmen Sie rechnerisch die Geschwindigkeit für die anaerobe Schwelle nach dem Modell von Simon!

d) Bei der abgebildeten Laktatkurve fällt auf (s. Abbildung 1), dass die Laktatkonzentration in einem bestimmten Geschwindigkeitsbereich abnimmt. Berechnen Sie die Grenzen dieses Bereiches!

e) Bei welcher Laufgeschwindigkeit nimmt die Laktatkonzentration am stärksten ab?

f) Abbildung 2 zeigt die Laktatkurve eines Sportlers B, für den die Untersuchung wie für Sportler A durchgeführt wurde. Begründen Sie, welcher der beiden Sportler A und B den besseren Trainingszustand aufweist!

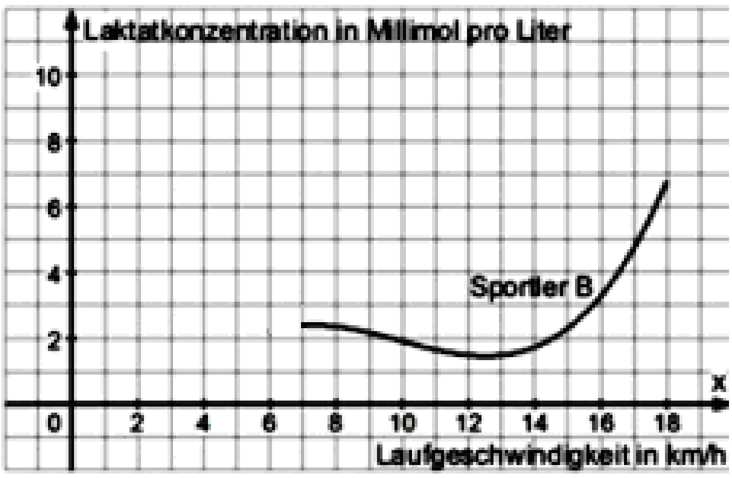


Abbildung 2

3. Aufgabe **Gruppe A**

Bei der folgenden Multiple-Choice-Aufgabe gilt:

- alle richtigen Angaben sind durch Ankreuzen ($\boxed{\text{X}}$) zu kennzeichnen
- es können bis zu vier Angaben pro Aufgabenteil richtig sein
- ein Aufgabenteil gilt nur dann als bearbeitet, wenn wenigstens eine Angabe durch Ankreuzen gekennzeichnet ist

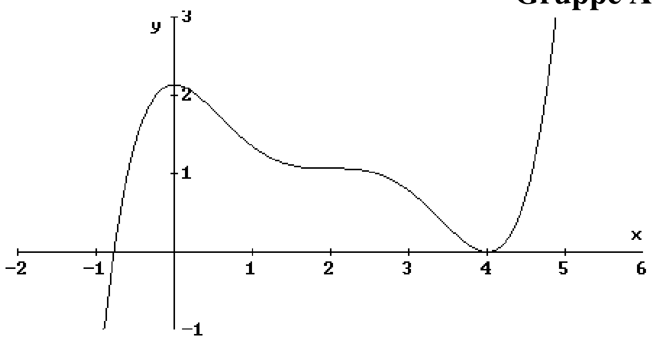
a) Welche der folgenden Aussagen sind für **<u>jede</u>** ganzrationale Funktion 3. Grades zutreffend?

- ☐ Die Funktion hat eine Wendestelle.
- ☐ Die Funktion hat 3 Nullstellen.
- ☐ Die Funktion hat höchstens zwei Extremstellen.
- ☐ Die Funktion hat mindestens eine Nullstelle.
- ☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

b) Welche der folgenden Aussagen über ganzrationale Funktionen sind richtig?

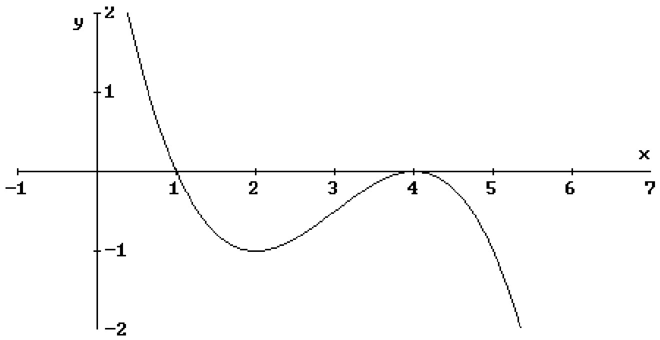
- ☐ Wenn eine Funktion *f* an einer Stelle x_0 einen Tiefpunkt besitzt, dann gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$.
- ☐ Liegt in einem Punkt eines Graphen ein Übergang von einer Zunahme der Steigung zu einer Abnahme der Steigung vor, so handelt es sich um einen Wendepunkt.
- ☐ Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann hat die Funktion *f* an der Stelle x_0 einen Tiefpunkt.
- ☐ Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, dann hat die Funktion *f* an der Stelle x_0 keinen Extrempunkt.
- ☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

c) In der nebenstehenden Zeichnung sehen Sie den Graphen einer ganzrationalen Funktion *f*.
Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?



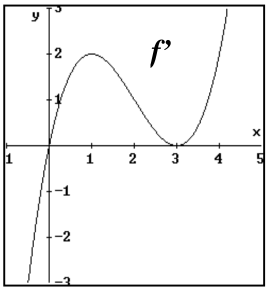
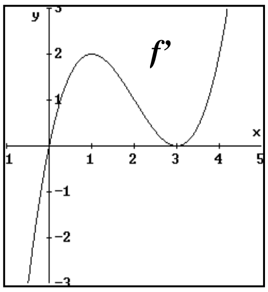
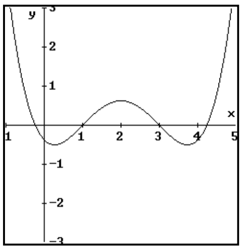
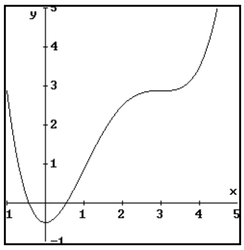
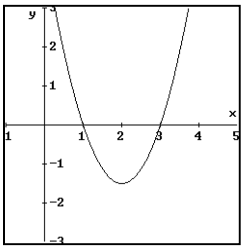
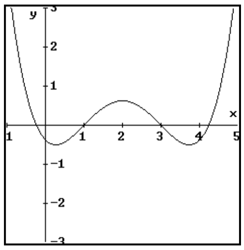
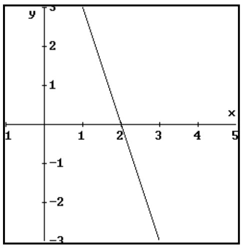
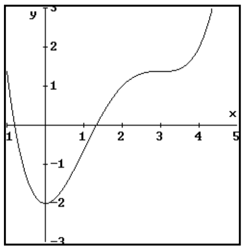
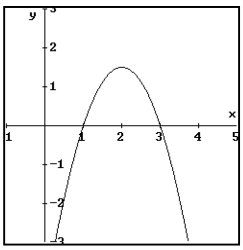
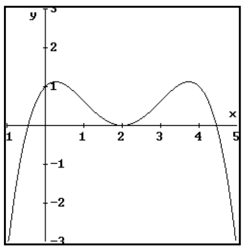
- ☐ f hat mindestens den Grad 5.
- ☐ Der Graph der Ableitungsfunktion f' hat an der Stelle 2 einen Extrempunkt.
- ☐ Die Ableitungsfunktion f' fällt im Bereich von 0 bis 4.
- ☐ Für $0 < x < 1$ gilt $f'(x) < 0$.
- ☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

d) In der nebenstehenden Zeichnung sehen Sie den Graphen einer Ableitungsfunktion f'.
Welche der folgenden Aussagen über die Ausgangsfunktion f sind zutreffend?



- ☐ Der Graph von f hat an der Stelle 1 einen Hochpunkt.
- ☐ Der Graph von f hat an der Stelle 4 einen Tiefpunkt.
- ☐ f hat im dargestellten Bereich zwei Wendestellen.
- ☐ Im Intervall von 1 bis 4 ist der Graph von f monoton steigend.
- ☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

Gruppe A

e)	**f)**
 Im Bild sehen Sie den Graph der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.	 Im Bild sehen Sie den Graph der Ableitungsfunktion f' zu einer Funktion f.
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Keiner der Graphen passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Keiner der Graphen passt zu einer Funktion f, deren Ableitung f' ist. ☐

3. Aufgabe **Gruppe B**

Bei der folgenden Multiple-Choice-Aufgabe gilt:

- alle richtigen Angaben sind durch Ankreuzen ($\boxed{X}$) zu kennzeichnen
- es können bis zu vier Angaben pro Aufgabenteil richtig sein
- ein Aufgabenteil gilt nur dann als bearbeitet, wenn wenigstens eine Angabe durch Ankreuzen gekennzeichnet ist

a) Welche der folgenden Aussagen sind für **<u>jede</u>** ganzrationale Funktion 3. Grades zutreffend?

☐ Die Funktion hat 3 Nullstellen.

☐ Die Funktion hat höchstens zwei Extremstellen.

☐ Die Funktion hat eine Wendestelle.

☐ Die Funktion hat mindestens eine Nullstelle.

☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

b) Welche der folgenden Aussagen über ganzrationale Funktionen sind richtig?

☐ Liegt in einem Punkt eines Graphen ein Übergang von einer Zunahme der Steigung zu einer Abnahme der Steigung vor, so handelt es sich um einen Wendepunkt.

☐ Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann hat die Funktion f an der Stelle x_0 einen Tiefpunkt.

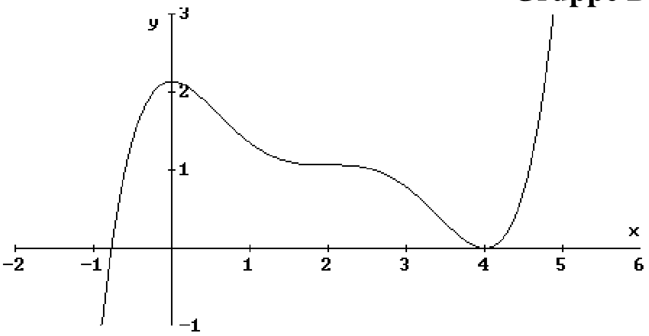
☐ Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, dann hat die Funktion f an der Stelle x_0 keinen Extrempunkt.

☐ Wenn eine Funktion f an einer Stelle x_0 einen Tiefpunkt besitzt, dann gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$.

☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

Gruppe B

c) In der nebenstehenden Zeichnung sehen Sie den Graphen einer ganzrationalen Funktion *f*. Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?



☐ Der Graph der Ableitungsfunktion f hat an der Stelle 2 einen Extrempunkt.

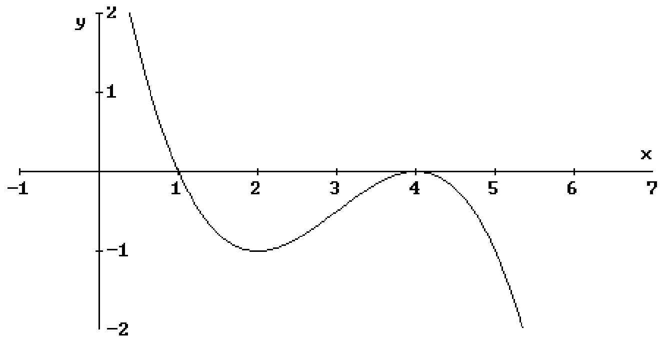
☐ Die Ableitungsfunktion f fällt im Bereich von 0 bis 4.

☐ Für $0 < x < 1$ gilt $f'(x)$ 0.

☐ f hat mindestens den Grad 5.

☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

d) In der nebenstehenden Zeichnung sehen Sie den Graphen einer Ableitungsfunktion f . Welche der folgenden Aussagen über die Ausgangsfunktion f sind zutreffend?



☐ Der Graph von f hat an der Stelle 4 einen Tiefpunkt.

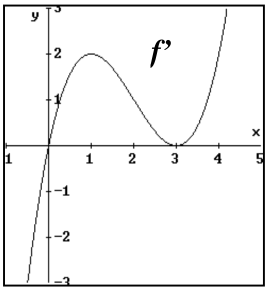
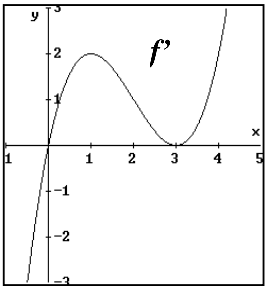
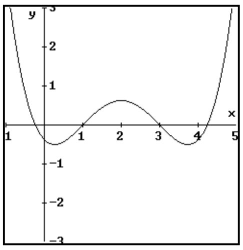
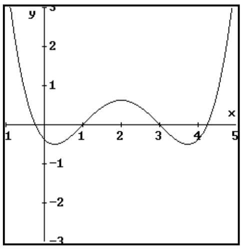
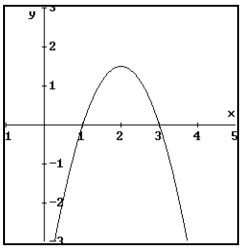
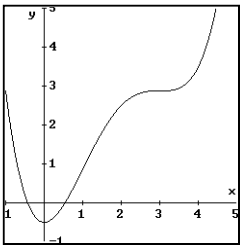
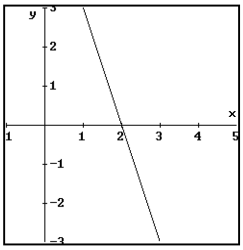
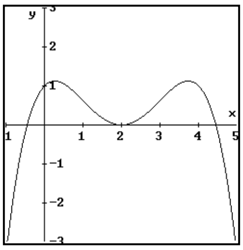
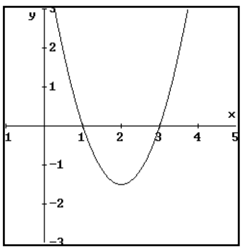
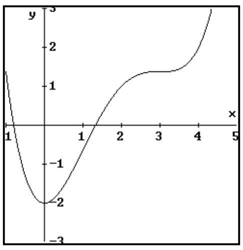
☐ Der Graph von f hat an der Stelle 1 einen Hochpunkt.

☐ Im Intervall von 1 bis 4 ist der Graph von f monoton steigend.

☐ f hat im dargestellten Bereich zwei Wendestellen.

☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

Gruppe B

e)	**f)**
 Im Bild sehen Sie den Graph der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.	 Im Bild sehen Sie den Graph der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Keiner der Graphen passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Keiner der Graphen passt zu einer Funktion f, deren Ableitung f' ist. ☐

Vergleichsklausur 2004

1. Aufgabe

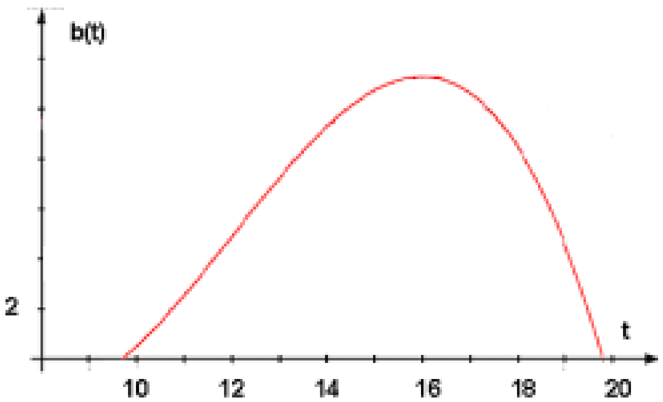
Gegeben ist f mit $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x + t$, wobei t>0 ist.

a) Wie muss t gewählt werden, damit $x_0 = -2$ eine Nullstelle der Funktion f ist. Berechnen Sie die weiteren Nullstellen der gefundenen Funktion und zerlegen Sie den Term in Linearfaktoren!
b) Ermitteln Sie die lokalen Extremstellen der in a) berechneten Funktion und skizzieren Sie anhand der ermittelten Ergebnisse anschließend den Graphen von f und die Tangente sowie die Normale im Wendepunkt W(0/4)!
c) Die Tangente und die Normale im Wendepunkt W(0/t) bilden für **beliebiges t>0** mit der x-Achse ein Dreieck. Für welches t ist der Flächeninhalt des Dreiecks 15 Flächeneinheiten groß?

2. Aufgabe

Nebenstehende Graphik gibt vereinfacht die Anzahl b der Besucher (gemessen in tausend Personen) in einem Freizeitpark von 10.00 Uhr bis 19.30 Uhr an. Der Funktionsterm dazu lautet:

$$b(t) = -0{,}05t^3 + 1{,}8t^2 - 19{,}2t + 62{,}5 \quad \text{für } 10 < t \le 19{,}5.$$



a) Berechnen Sie die Zahl der Besucher, die an einem Tag eine Stunde nach Öffnung im Park sind!
b) Wann ist die Zahl der Besucher maximal? Wie viele sind es?
c) Wann ist der Andrang an den Kassen am größten? Begründen Sie im Sachzusammenhang!
d) Erfahrungsgemäß ist an den Imbissstuben im Park mit erhöhtem Andrang zu rechnen, wenn mindestens 9500 Besucher im Park sind. Für den Direktor besteht dann die Notwendigkeit, zusätzliches Personal bereit zu stellen. Der Zeitraum, für den dies erforderlich ist, soll näherungsweise, z.B. zeichnerisch ermittelt werden.

Vergleichsklausur 2003 in der Jahrgangsstufe 11

Aufgabe 1

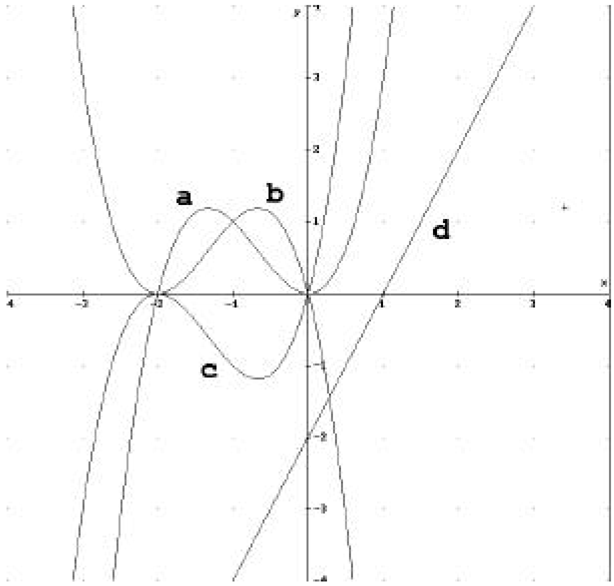
Gegeben ist die Funktion mit

$$f(x) = \frac{1}{}x^3 - x^2 - \frac{5}{}x + 3 .$$

a) Berechnen Sie die Extremstellen und die Wendestelle der Funktion f.
(Hinweis: Die y-Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte sind nicht zu berechnen.)

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $P_0(0;?)$.

c) Wo schneidet die Tangente den Graphen ein zweites Mal?

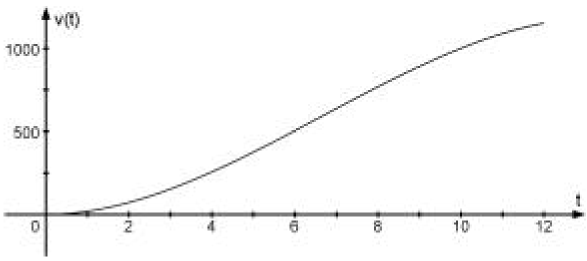


Aufgabe 2

In dem nebenstehenden Bild sind mehrere Graphen abgebildet. Welcher Graph gehört zur Funktion f mit $f(x) = x(x+2)^2$? Kurze Begründung!

Aufgabe 3

Pflanzen produzieren bei der Fotosynthese Sauerstoff, den sie an ihre Umgebung abgeben. Wir betrachten nun diesen Vorgang für einen bestimmten Baum an einem bestimmten Tag zwischen 6 Uhr morgens (Sonnenaufgang) und 18 Uhr abends (Sonnenuntergang). Messungen ergaben für diesen Baum den abgebildeten Graphen.



Hierbei gibt t an, wie viel Stunden seit dem Sonnenaufgang um 6 Uhr vergangen sind.
v(t) gibt an, wie viel Liter Sauerstoff der Baum bis zum Zeitpunkt t insgesamt produziert hat.

Der Graph kann näherungsweise beschrieben werden durch

$$v(t) = -t^3 + 20t^2 \quad \text{mit } 0 \le t \le 12 \;.$$

a) Zeigen Sie, dass der Baum bis 13 Uhr insgesamt 637 Liter Sauerstoff produziert hat.
Wie viel Sauerstoff gibt der Baum zwischen 13 Uhr und 17 Uhr durchschnittlich pro Stunde ab?

b) Um wie viel Prozent ist die Produktion zwischen 15 Uhr und 17 Uhr niedriger als zwischen 13 Uhr und 15 Uhr? (Runden Sie das Endergebnis auf eine Dezimale.)

c) Bestimmen Sie die Steigung von v an der Stelle $t = 5$, und erläutern Sie die Bedeutung dieses Wertes in dem gegebenen Sachzusammenhang.

d) Wann produziert der Baum am meisten Sauerstoff? Geben Sie zunächst eine begründete Vermutung. Erläutern Sie anschließend, wie man diesen Zeitpunkt rechnerisch ermitteln kann.

Nur für den Dienstgebrauch!

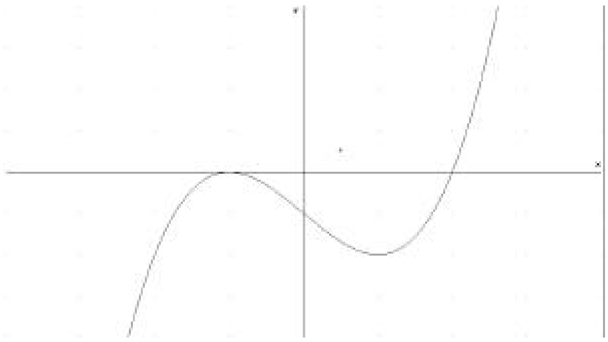
Vergleichsklausur 2002

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit dem Funktionsterm

$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x - 2$

und dem nebenstehenden Graphen.



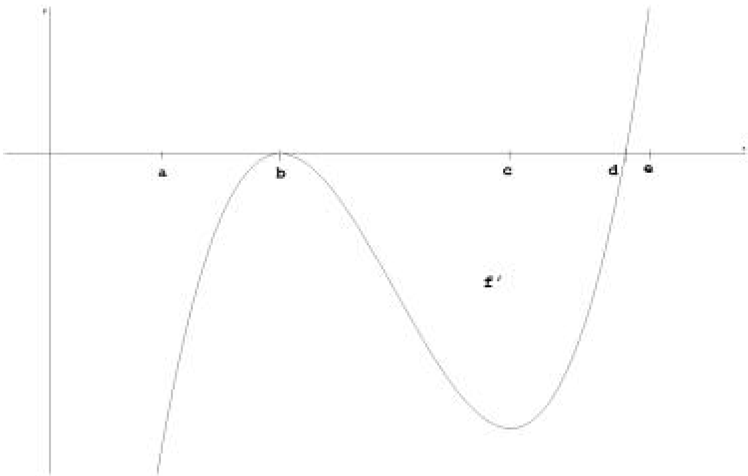
a) Bestimmen Sie die Nullstellen und die lokalen Extremstellen der Funktion f.

b) Welche Gleichung hat die Tangente im Wendepunkt W. Zeigen Sie, dass die Normale in W die Gleichung $y = \frac{2}{3}x - 2$ hat.

c) Wie lautet die Gleichung des Kreises mit dem Radius $r = \sqrt{52}$, dessen Mittelpunkt auf der Normalen liegt und der die Tangente in W berührt?

Aufgabe 2

f sei eine ganzrationale Funktion über dem Intervall $[a, e]$. Der Graph der Ableitungsfunktion f' ist in der folgenden Zeichnung gegeben:



a) Machen Sie eine begründete Aussage über den Grad der Ableitungsfunktion f'.

b) In welchen Intervallen steigt der Graph von f, in welchen fällt er (Begründung!)?

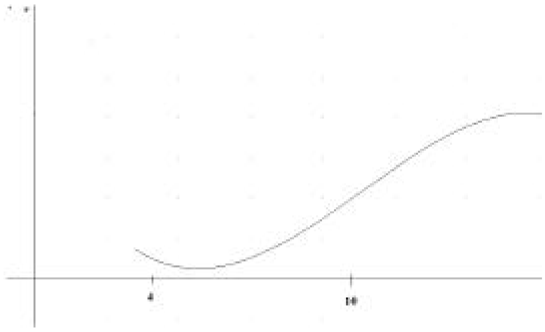
c) Welches Verhalten zeigt der Graph von f an den Stellen b, c und d (Begründung!)?

d) Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen von f.

e) Machen Sie eine begründete Aussage über die mögliche Anzahl der Nullstellen von f im Intervall [a,e].

Aufgabe 3

Ein Industrieunternehmen lässt ständig beobachten, wie viele Surfer gerade die Internetseiten des Unternehmens besuchen. Die nebenstehende Kurve zeigt den durchschnittlichen Besuch der Internetseiten im Zeitraum von 4h morgens bis 16h nachmittags. Die Anzahl der Surfer, die zu einem bestimmten Zeitpunkt gerade die Internetseiten besuchen, lässt sich näherungsweise durch den folgenden Funktionsterm beschreiben:



$$f(x) = -x^3 + 30x^2 - 225x + 520.$$

Dabei gibt zum Beispiel $f(8)$ an, wie viele Surfer um 8h auf den Internetseiten der Firma sind.

a) Berechnen Sie $f'(9)$ und erläutern Sie die Bedeutung von $f'(9)$ in der vorgegebenen Situation.

b) Von besonderem Interesse ist die Höchstzahl von Surfern, die an einem bestimmten Tag zu einem bestimmten Zeitpunkt zwischen 4h und 16h gleichzeitig die Internetseiten des Unternehmens besuchen. Wie hoch ist dieser Spitzenwert gemäß f(x)?
(Zur Kontrolle: 520 Surfer)

c) Am 31.Mai ergab sich ein Spitzenwert von 805 Surfern, die gleichzeitig die Seiten des Unternehmens besuchten. Um wie viel Prozent lag dieser Wert über dem zu erwartenden Spitzenwert von b)?

d) An einem bestimmten Tag sind abweichend von f(9) um 9h bereits 240 Besucher auf den Internetseiten, weil sich in der Zwischenzeit die Anzahl derer erhöht hat, die einen Internetanschluss haben. Mit wie vielen Besuchern würden Sie dann an diesem Tag um 10h rechnen? Geben Sie eine oder auch mehrere rechnerisch begründete Prognosen an.

Vergleichsarbeit Analysis Stufe 11 im Jahr 2001

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 1$.

a. Ermitteln Sie die erste, zweite und dritte Ableitung von f.

b. Berechnen Sie die durchschnittliche Steigung von f im Intervall [0; 2].

c. Welche Steigung hat der Graph von f an der Stelle x = 1 ?

d. Stellen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x = 1 auf.

e. In welchem Punkt hat der Graph von f die Steigung - 3 ?

f. Berechnen Sie mit dem Differenzenquotienten die Ableitung von f an der Stelle x = 2.

Aufgabe 2:

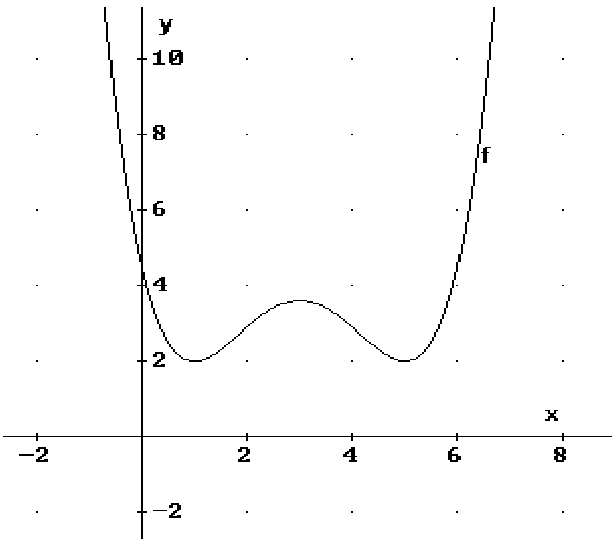


Bild 1

Gegeben ist der Graph der ganzrationalen Funktion **f** gemäß *Bild 1*.

a. In *Bild 2* und *Bild 3* sind die Graphen von Ableitungsfunktionen $\mathbf{g'_1}$ und $\mathbf{g'_2}$ dargestellt. Begründen Sie, warum keine der beiden Funktionen als Ableitung von **f** in Frage kommen kann.

b. Markieren Sie auf dem Graphen von **f** in *Bild 1* die Anteile in einer anderen Farbe, für die **f '(x)>0** gilt. Skizzieren Sie dann den Graphen von **f '(x)**.

c. Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion $\mathbf{g_1}$, die als Ableitung die Funktion $\mathbf{g'_1}$aus *Bild 2* hat.

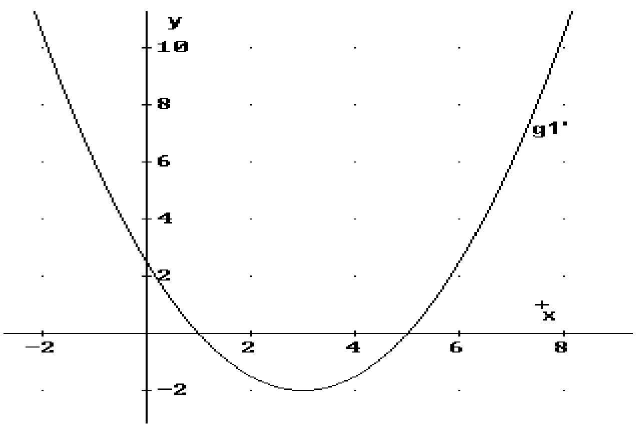


Bild 2

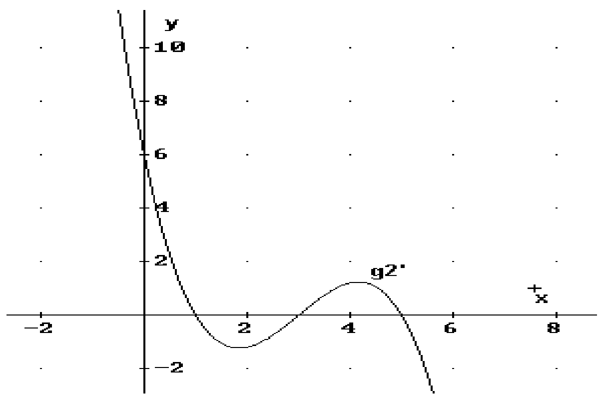


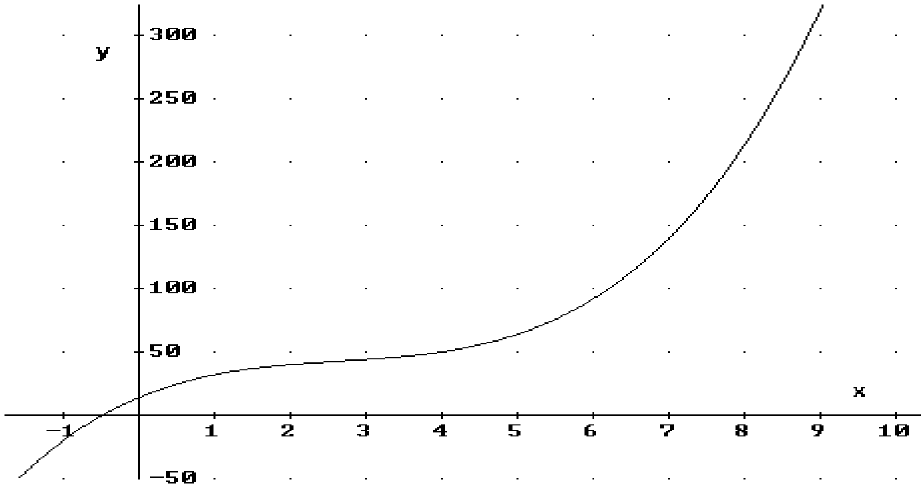
Bild 3

Nur für den Dienstgebrauch!

Aufgabe 3:

Gegeben sind die Funktionen **f(x)**= $x^3 - 8x^2 + 25x + 14$ und **g(x)** = 20x.

Der Graph von **f** ist unten abgebildet.



a. Weisen Sie rechnerisch nach, dass **f** keine lokalen Extremstellen hat. Berechnen Sie die Wendestelle von **f**.

b. Tragen Sie den Graphen von **g** in die Zeichnung ein und berechnen Sie die Schnittstellen von **f** und **g**.

c. Berechnen Sie die lokalen Extremstellen der Differenzfunktion **d**(x) = **g**(x) - **f**(x) = $- x^3 + 8x^2 - 5x - 14$.

d. Skizzieren Sie mit Hilfe der bisher gewonnenen Ergebnisse den Graphen der Differenzfunktion **d**. Benutzen Sie dazu die obige Zeichnung.

Im Rahmen wirtschaftlicher Untersuchungen kann die Funktion **f** für $x \geq 0$ die "Kostenfunktion" eines Unternehmens modellieren. Dabei werden die anfallenden Kosten (**f**(x) Geldeinheiten) in Abhängigkeit vom produzierten Gut (x Produktionseinheiten) beschrieben. Wird eine Produktionseinheit für 20 Geldeinheiten verkauft, so stellt **g** die "Erlösfunktion" dar.

e. In welchem Bereich muss die Anzahl x der Produktionseinheiten liegen, damit das Unternehmen keinen Verlust macht?
Was bedeuten die Ergebnisse von Aufgabenteil c) in diesem Sachzusammenhang?
Welche Bedeutung hat hier **f**(0)?

Vergleichsarbeit Analysis Stufe 11 im Jahr 2000

Aufgabe 1:

Eine Parabel hat eine Gleichung der Form $f(x) = ax^2 + bx$.

a. In A(3;3) hat sie die Steigung -2. Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel.
[Zur Kontrolle: $f(x) = -x^2 + 4x$]

b. Ermitteln Sie für $x_0 = 1$ die Gleichung der Tangente an die Parabel. Wie groß ist der Winkel, den die Tangente mit der positiven Richtung der x-Achse bildet?

c. Stellen Sie die Gleichung der Normalen zur Tangente durch B(1; y_0) auf. Zeichnen Sie die Parabel, die Tangente und die Normale in dasselbe Koordinatensystem. Wählen Sie als Einheit auf beiden Achsen jeweils 1 cm.

d. Von einer Funktion g sei bekannt, dass für alle x die Beziehung $g`(x) = f(x)$ gilt.

Untersuchen Sie den Graphen von g auf Wendestellen.

Aufgabe 2:

Das Bild auf der folgenden Seite zeigt den Graphen einer ganz-rationalen Funktion h.

a. Skizzieren Sie einen möglichen Graphen der Ableitung von h. Benutzen Sie dazu das Koordinatensystem, in welchem der Graph von h bereits eingetragen ist.

b. Die Funktion f mit $f(x) = -2x^3 + 24x^2$ besitzt einen vergleichbaren Graphen wie h. Zwischen ihren Nullstellen beschreibt die Funktion f die Wassermenge in einem Pumpspeicherwerk. Bestimmen Sie diesen Bereich. Dabei geben die y-Werte die Wassermenge in m^3, die x-Werte ($x \geq 0$) die Zeit in Stunden an.

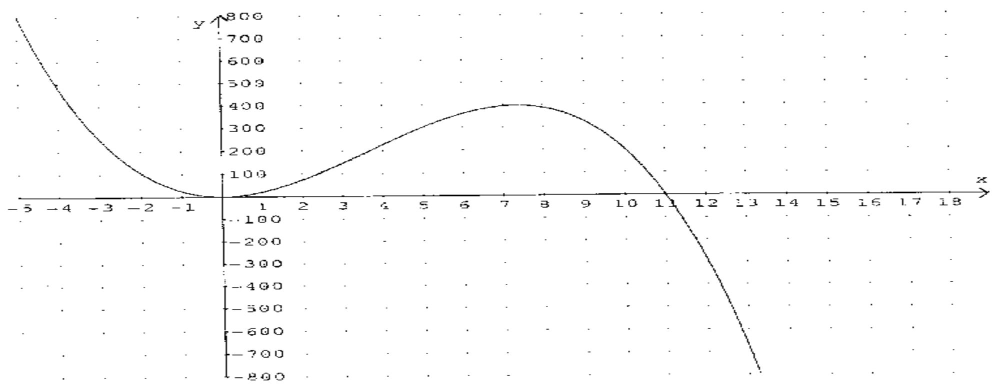
c. Wann wird nach dem Zeitpunkt x=0 die maximale Wassermenge erreicht, wie groß ist dieser maximale Wasserbestand?

d. Was bedeuten im Zusammenhang mit dem in Aufgabenteil b) beschriebenen Sachverhalt die Begriffe mittlere Änderungsrate der Funktion f und lokale Änderungsrate der Funktion f?

e. Bestimmen Sie den Wendepunkt des Graphen von f.

f. Welche Bedeutung hat die Wendestelle von f im Zusammenhang mit dem in Aufgabenteil b) beschriebenen Sachverhalt?

Skizze zu Aufgabe 2:



Nur für den Dienstgebrauch!