Unterlagen für die Lehrkraft

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2012

Mathematik

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

Aufgabe 1: Untersuchung ganzrationaler Funktionen	*(28 Punkte)*
Aufgabe 2: Kostenfunktion	*(28 Punkte)*

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2012

- Geraden und Geradengleichungen (z.B. g(A;B); Steigungswinkel; Parallelität)
- Nullstellen ganzrationaler Funktionen, in faktorisierter Form (keine Polynomdivision, einfaches Ausklammern)
- Untersuchung ganzrationaler Funktionen bis $n = 3$: Nullstellen, Standardsymmetrie, Hoch- und Tiefpunkte, Krümmungsverhalten (Links- und Rechtskrümmung), Wendepunkte (auch Sattelpunkte)
- Tangentengleichungen
- Einfache Transformationen wie Verschieben, Strecken oder Spiegeln von Funktionsgraphen ganzrationaler Funktionen 3. Grades
- Zusammenhang zwischen dem Graphen einer Funktion und den Graphen ihrer ersten und zweiten Ableitungsfunktion
- Differenzialrechnung in Sachzusammenhängen (z. B. durchschnittliche und momentane Änderungsrate; Interpretation ausgezeichneter Punkte im Sachkontext)

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

Aufgabe 1: Untersuchung ganzrationaler Funktionen

Modelllösung a)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(-x) = \frac{1}{4} \cdot (-x)^3 - 3 \cdot (-x) = -\frac{1}{4} \cdot x^3 + 3 \cdot x = -\left(\frac{1}{4} \cdot x^3 - 3 \cdot x\right) = -f(x)$$

Damit ist der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung.

Oder:

Da im Funktionsterm von f nur ungerade Exponenten auftreten, ist der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Modelllösung b)

Mögliche Beispiele:

An der Stelle $x = -2$ hat der Graph von f einen lokalen Extrempunkt. Daher schneidet der Graph von f' an dieser Stelle die x-Achse.

An der Stelle $x = 0$ hat der Graph von f einen Wendepunkt. Folglich hat der Graph der Funktion f' an dieser Stelle einen lokalen Extrempunkt.

Für $x < -2$ steigt der Graph von f. In diesem Bereich verläuft der Graph von f' daher oberhalb der x-Achse.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Modelllösung c)

(1) Ableitungen:

$$f'(x)=\frac{3}{4}\cdot x^2-3\,;\quad f''(x)=\frac{3}{2}\cdot x$$

Lokale Extrempunkte:

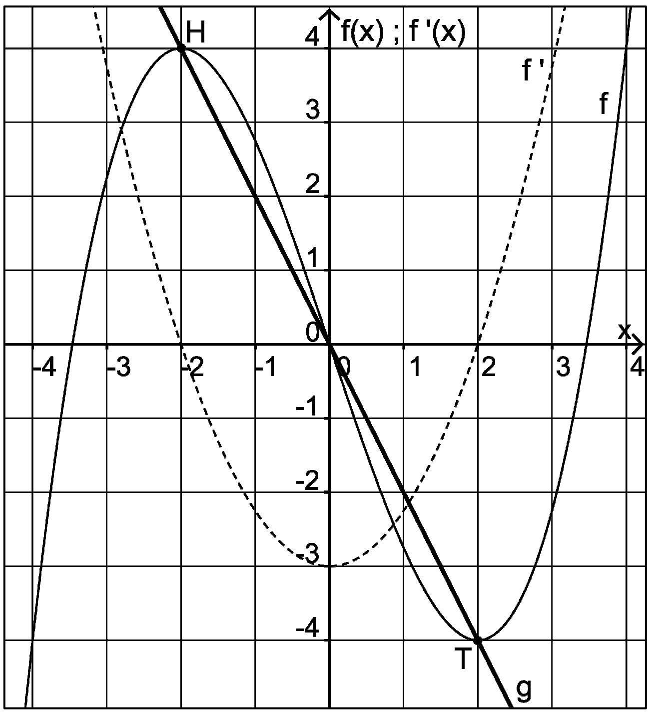
$f'(-2)=0 \wedge f''(-2)=-3<0\,,\ f(-2)=4$

$f'(2)=0 \wedge f''(2)=3>0\,,\ f(2)=-4$

Damit ergibt sich der lokale Hochpunkt $H\left(-2\middle|\,4\right)$ und der lokale Tiefpunkt $T\left(2\middle|-4\right)$.

Eine Argumentation unter Ausnutzung der Symmetrie ist ebenfalls zulässig.

(2)



Geradengleichung:

Gleichung einer Geraden: $y=m\cdot x+b$

$$m=\frac{-4-4}{2-(-2)}=-2$$

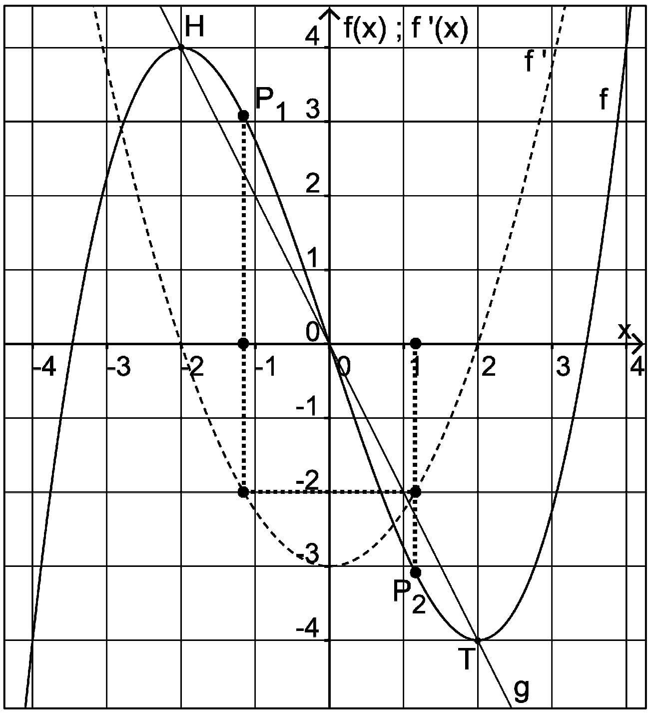
Wegen $T\in g$ ergibt sich $-4=-2\cdot 2+b \Leftrightarrow b=0$

und damit die Gleichung der Geraden $g: y=-2\cdot x$.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Modelllösung d)

(1)



Die Parallele zur x-Achse durch den Punkt $\left(0\middle|-2\right)$ schneidet den Graphen von $f\,'$ in zwei Punkten. Die beiden Parallelen zur y-Achse durch diese beiden Punkte schneiden den Graphen von f in den gesuchten Punkten P_1 und P_2.

(2) $f\,'(x) = -2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}\cdot x^2 - 3 = -2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}\cdot x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3} \vee x = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}$

Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Modelllösung e)

(1) $f_1(x) = f(x-2) - 4$

oder

$$f_1(x) = \frac{1}{4} \cdot (x-2)^3 - 3 \cdot (x-2) - 4$$

(2) Mögliche Begründungen:

Eine rechnerische Bestimmung der neuen Geradengleichung führt wieder zur Funktionsgleichung $y = -2 \cdot x$, also zur Gleichung von *g*.

Oder:

Die Gerade *g* verläuft durch den Hoch-, Tief- und Wendepunkt $(0|0)$ von *f*. Da bei der Verschiebung der Hochpunkt auf den Ursprung abgebildet wird und der Wendepunkt auf den Tiefpunkt, ändert *g* seine Lage nicht.

Oder:

Für die Steigung *m* der Geraden *g* gilt $m = -2$. Daher wird durch eine Verschiebung um zwei Einheiten nach rechts und vier Einheiten nach unten (siehe e) (1)) jeder Punkt der Geraden *g* auf einen anderen Punkt der Geraden *g* verschoben.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Aufgabe 2: Kostenfunktion

Modelllösung a)

$K(560) = 0{,}0015 \cdot 560^3 - 1{,}125 \cdot 560^2 + 298{,}8 \cdot 560 + 20\,000 = 97\,952$

Bei der Produktion von 560 Lampen entstehen Kosten in Höhe von 97 952 €.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Modelllösung b)

(1) $K'(x) = 0{,}0045 \cdot x^2 - 2{,}25 \cdot x + 298{,}8$

$K'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}0045 \cdot x^2 - 2{,}25 \cdot x + 298{,}8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 500 \cdot x + 66\,400 = 0$

Für die Diskriminante D dieser quadratischen Gleichung gilt:

$D = 250^2 - 66\,400 = -3\,900 < 0$. Die Gleichung $K'(x) = 0$ hat daher keine Lösung und die Funktion K besitzt somit keine lokalen Extremstellen.

(2) Es ist sinnvoll, dass die Kostenfunktion keine lokalen Extremstellen (für $0 \le x \le 1000$) hat, da es sonst einen Bereich geben würde, in dem die Funktionswerte mit steigenden Werten von x fallen. Dies würde bedeuten, dass in diesem Bereich die Gesamtkosten sinken, wenn mehr Lampen produziert werden.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Modelllösung c)

(1) $K''(x) = 0{,}009 \cdot x - 2{,}25$; $K'''(x) = 0{,}009$

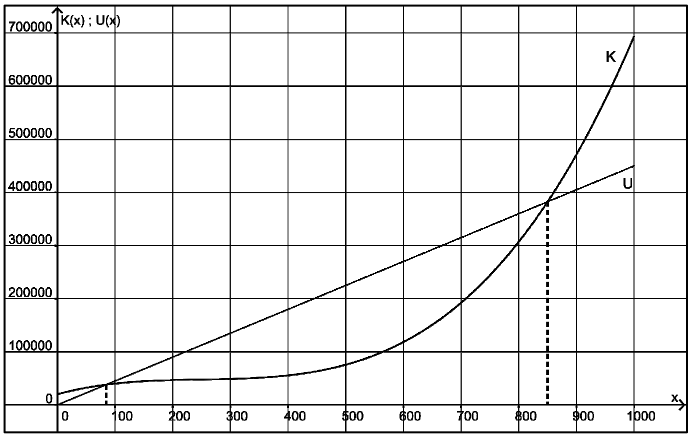
Mit der notwendigen Bedingung $K''(x) = 0$ für Wendestellen folgt $x = 250$. Weil zusätzlich $K'''(250) = 0{,}009 \neq 0$ gilt, ist $x = 250$ die gesuchte Stelle.

(2) Ab einer Produktionsmenge von 250 Lampen wird der Betrag, um den die Kosten bei der Herstellung einer zusätzlichen Lampe steigen, mit jeder weiteren produzierten Lampe immer größer.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Modelllösung d)

(1)



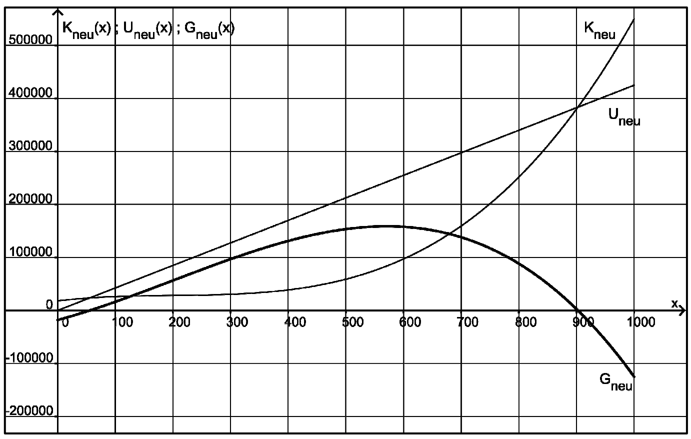
Die Schnittstellen der beiden Graphen liegen näherungsweise bei 85 und 850. Im Bereich zwischen diesen Schnittstellen liegt der Graph der Umsatzfunktion oberhalb des Graphen der Kostenfunktion. Daraus ergibt sich, dass der Hersteller bei einer Produktionsmenge von ca. 85 bis 850 Lampen Gewinn macht.

(2) $U(560) - K(560) = 450 \cdot 560 - 97\,952 = 154\,048$

Der maximale Gewinn des Herstellers beträgt 154 048 €.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Modelllösung e)



Der Graph der Gewinnfunktion ergibt sich als Graph der Differenzfunktion aus Umsatz- und Kostenfunktion. Wesentliche Merkmale des Graphen sind die Nullstellen, der Hochpunkt und die negativen Funktionswerte an den Rändern.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

7. Bewertungsbogen zur Klausur

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule:____

Aufgabe 1: Untersuchung ganzrationaler Funktionen

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	untersucht anhand des Funktionsterms, ob der Graph der Funktion f symmetrisch ist.	2	
sachlich richtige Alternativen: (2) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe a)	**2**	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	gibt zwei Eigenschaften des Graphen von f' an, die sich aus Eigenschaften des Graphen von f ergeben.	4	
sachlich richtige Alternativen: (4) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe b)	**4**	

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	(1) berechnet die Ableitungen f' und f''.	2	
2	(1) weist rechnerisch nach, dass der Graph den lokalen Hochpunkt H und den lokalen Tiefpunkt T besitzt.	6	
3	(2) zeichnet die Gerade g durch die beiden lokalen Extrempunkte ein und bestimmt rechnerisch die Gleichung dieser Geraden.	3	
sachlich richtige Alternativen: (11) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe c)	**11**	

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	(1) bestimmt die Punkte P_1 und P_2 zeichnerisch unter Verwendung des Graphen der Ableitungsfunktion.	2	
2	(1) beschreibt sein Vorgehen.	2	
3	(2) bestimmt durch eine Rechnung die genauen x-Koordinaten der Punkte P_1 und P_2.	3	
sachlich richtige Alternativen: (7) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe d)	**7**	

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	(1) gibt eine Funktionsgleichung von f_1 an.	2	
2	(2) begründet, dass die Geraden g und g_1 identisch sind.	2	
sachlich richtige Alternativen: (4) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe e)	**4**	

	Summe insgesamt	**28**	

Aufgabe 2: Kostenfunktion

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	berechnet die Gesamtkosten für 560 produzierte Lampen.	2	
sachlich richtige Alternativen: (2) ………………………………………………………………………….......... …………………………………………………………………………..........			
	Summe Teilaufgabe a)	**2**	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	(1) untersucht rechnerisch die Kostenfunktion K auf lokale Extremstellen.	5	
2	(2) begründet, dass es im Sachzusammenhang sinnvoll ist, dass die Kostenfunktion keine lokalen Extremstellen besitzt.	3	
sachlich richtige Alternativen: (8) ………………………………………………………………………….......... …………………………………………………………………………..........			
	Summe Teilaufgabe b)	**8**	

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	(1) bestimmt rechnerisch die Wendestelle.	5	
2	(2) erklärt die Bedeutung der Linkskrümmung im Sachzusammenhang.	3	
sachlich richtige Alternativen: (8) ………………………………………………………………………….......... …………………………………………………………………………..........			
	Summe Teilaufgabe c)	**8**	

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	(1) bestimmt aus der Abbildung 1 näherungsweise, bei welchen Produktionsmengen der Hersteller einen Gewinn macht, und begründet sein Ergebnis.	3	
2	(2) ermittelt den maximalen Gewinn.	3	
sachlich richtige Alternativen: (6) ………………………………………………………………………............. ……………………………………………………………………….............			
	Summe Teilaufgabe d)	**6**	

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	zeichnet möglichst genau den Verlauf des Graphen der Gewinnfunktion in die Abbildung 2 ein.	4	
sachlich richtige Alternativen: (4) ………………………………………………………………………............. ……………………………………………………………………….............			
	Summe Teilaufgabe e)	**4**	

	Summe insgesamt	**28**	

Festlegung der Gesamtnote

	Lösungsqualität	
	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
Übertrag der Punktsumme aus der ersten Aufgabe	**28**	
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten Aufgabe	**28**	
Gesamtpunktzahl	**56**	

Note

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Noten zu den Punktsummen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Erreichte Punktsummen**
sehr gut	49 – 56
gut	41 – 48
befriedigend	33 – 40
ausreichend	24 – 32
mangelhaft	12 – 23
ungenügend	0 – 11