Unterlagen für die Lehrkraft

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2013

Mathematik

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

Aufgabe 1: Untersuchung ganzrationaler Funktionen	*(28 Punkte)*
Aufgabe 2: Persönliche Leistungskurve	*(28 Punkte)*

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2013

- Geraden und Geradengleichungen (z.B. g(A;B); Steigungswinkel; Parallelität)
- Nullstellen ganzrationaler Funktionen, in faktorisierter Form (keine Polynomdivision, einfaches Ausklammern)
- Untersuchung ganzrationaler Funktionen bis $n = 3$: Nullstellen, Standardsymmetrie, Hoch- und Tiefpunkte, Krümmungsverhalten (Links- und Rechtskrümmung), Wendepunkte (auch Sattelpunkte)
- Tangentengleichungen
- Einfache Transformationen wie Verschieben, Strecken oder Spiegeln von Funktionsgraphen ganzrationaler Funktionen 3. Grades
- Zusammenhang zwischen dem Graphen einer Funktion und den Graphen ihrer ersten und zweiten Ableitungsfunktion
- Differenzialrechnung in Sachzusammenhängen (z. B. durchschnittliche und momentane Änderungsrate; Interpretation ausgezeichneter Punkte im Sachkontext)

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

Aufgabe 1: Untersuchung ganzrationaler Funktionen

Modelllösung a)

(1) Ableitungen: $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 2 \cdot x$; $f''(x) = x - 2$

Mit der notwendigen Bedingung $f'(x) = 0$ für lokale Hoch- und Tiefpunkte folgt $x = 0$ oder $x = 4$. Weil zusätzlich $f''(0) = -2 < 0$ und $f(0) = 4$ gilt, ist der lokale Hochpunkt $H(0|4)$. Weil außerdem $f''(4) = 2 > 0$ und $f(4) = -\frac{4}{3}$ gilt, ist der lokale Tiefpunkt $T\left(4\middle|-\frac{4}{3}\right)$.

(2) $m = \frac{-\frac{4}{3} - 4}{4 - 0} = -\frac{4}{3}$

Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Modelllösung b)

$f(2) = \frac{4}{3} = 1{,}\overline{3}$. Wegen $1{,}3 < 1{,}\overline{3}$ liegt der Punkt P im Teil B.

Ein bloßes Ablesen ist aufgrund der Gegebenheiten eine ungeeignete Methode und führt nicht zur Vergabe von Bewertungspunkten.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Modelllösung c)

(1) Gleichung der Tangente t: $t(x) = m \cdot x + b$:

$m = f'(1) = -\frac{3}{2}$

Wegen $Q \in t$ ergibt sich: $\frac{19}{6} = -\frac{3}{2} \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{14}{3}$

und damit die Gleichung der Tangente t: $t(x) = -\frac{3}{2} \cdot x + \frac{14}{3}$.

(2) Für die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 3$ gilt:

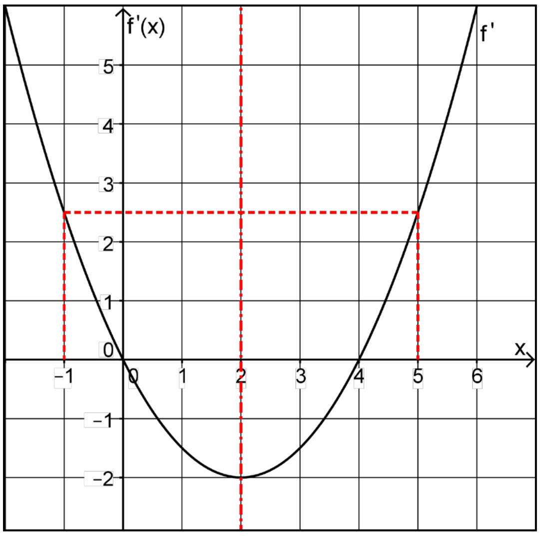
$$m = f'(3) = -\frac{3}{2}$$

Da diese Steigung mit der Steigung von t übereinstimmt, ist die Tangente an der Stelle $x = 3$ parallel zu t.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Modelllösung d)

(1), (2)



(3) $f'(2-a) = \frac{1}{2}\cdot(2-a)^2 - 2\cdot(2-a) = \frac{1}{2}\cdot\left(4-4\cdot a+a^2\right) - 2\cdot(2-a)$

$= 2 - 2\cdot a + \frac{1}{2}\cdot a^2 - 4 + 2\cdot a = \frac{1}{2}\cdot a^2 - 2$

$f'(2+a) = \frac{1}{2}\cdot(2+a)^2 - 2\cdot(2+a) = \frac{1}{2}\cdot\left(4+4\cdot a+a^2\right) - 2\cdot(2+a)$

$= 2 + 2\cdot a + \frac{1}{2}\cdot a^2 - 4 - 2\cdot a = \frac{1}{2}\cdot a^2 - 2$

Somit gilt: $f'(2-a) = f'(2+a)$

Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Aufgabe 2: Persönliche Leistungskurve

Modelllösung a)

$f(1) = 7{,}125, \quad f(7) = 4{,}875$

Um 9:00 Uhr hat die subjektive Leistungsfähigkeit Fraukes einen Skalenwert von 7,125 und um 15:00 Uhr einen Skalenwert von 4,875.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Modelllösung b)

Gesucht ist die Maximalstelle von f sowie das Maximum selbst.

Ableitungen: $f'(t) = 0{,}375 \cdot t^2 - 3 \cdot t + 4{,}5$; $f''(t) = 0{,}75 \cdot t - 3$

Mit der notwendigen Bedingung $f'(t) = 0$ folgt:

$0{,}375 \cdot t^2 - 3 \cdot t + 4{,}5 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 8 \cdot t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = 6$

Wegen $f''(2) = -1{,}5 < 0$ liegt an der Stelle $t = 2$ ein lokales Maximum mit $f(2) = 8$ vor. Es handelt sich für den zu Grunde liegenden Zeitraum auch um das absolute Maximum, erkennbar z. B. an den Randwerten $f(0)$ und $f(7)$ oder an Abbildung 1.

Frauke erreicht ihre maximale Leistungsfähigkeit um 10:00 Uhr mit einem Skalenwert von 8.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Modelllösung c)

Gesucht sind die Stellen maximaler Ab- bzw. Zunahme der subjektiven Leistungsfähigkeit.

Mit $f''(t) = 0{,}75 \cdot t - 3$ und $f''(t) = 0$ folgt $t = 4$. Wegen $f'''(4) = 0{,}75 > 0$ liegt bei $t = 4$ ein relatives Minimum von f' vor. Da es sich um die einzige relative Extremstelle handelt, liegt dort auch ein absolutes Minimum vor.

Die Stelle maximaler Zunahme muss am Rand des Intervalls liegen. Es gilt $f'(0) = 4{,}5$ und $f'(7) = 1{,}875$.

Die subjektive Leistungsfähigkeit von Frauke nimmt also um 12:00 Uhr am stärksten ab und morgens um 8:00 Uhr am schnellsten zu.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Modelllösung d)

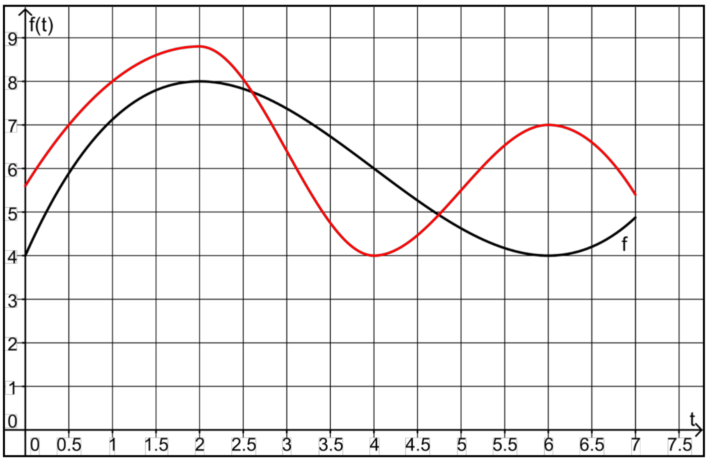
(1) Der Graph von *g* ergibt sich durch eine Verschiebung um 0,5 Einheiten nach rechts und eine Verschiebung um 1 Einheit nach oben aus dem Graphen von *f*.

(2) $g(t) = f(t - 0{,}5) + 1$

Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Modelllösung e)

(1)



(2) Da die Leistungskurve von Hans drei lokale Extrempunkte aufweist (und somit die zugehörige Ableitungsfunktion mindestens vom Grad 3 sein muss), kann es sich nicht um den Graphen einer Funktion 3. Grades handeln.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

7. Bewertungsbogen zur Klausur

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule:____

Aufgabe 1: Untersuchung ganzrationaler Funktionen

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	(1) berechnet die Ableitungen f' und f''.	2	
2	(1) berechnet die Koordinaten des lokalen Hochpunktes und des lokalen Tiefpunktes.	6	
3	(2) berechnet die Steigung der Geraden durch die beiden lokalen Extrempunkte.	2	
sachlich richtige Alternativen: (10) ……………………………………………………………………………........... ……………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe a)	**10**	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	entscheidet begründet, ob der Punkt P zu A oder zu B gehört.	3	
sachlich richtige Alternativen: (3) ……………………………………………………………………………........... ……………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe b)	**3**	

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	(1) ermittelt eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt Q.	4	
2	(2) zeigt, dass die Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 3$ parallel zur Tangente t verläuft.	2	
sachlich richtige Alternativen: (6) ……………………………………………………………………………........... ……………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe c)	**6**	

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	(1) zeichnet die Symmetrieachse des Graphen von f' in die Abbildung 3 ein.	2	
2	(2) zeigt anhand des Graphen, dass für $a = 3$ die Gleichung erfüllt ist, indem er geeignete Hilfslinien in die Abbildung 3 einzeichnet.	3	
3	(3) weist rechnerisch nach, dass die Gleichung $f'(2-a) = f'(2+a)$ für jeden Wert von a gültig ist.	4	
sachlich richtige Alternativen: (9) ………………………………………………………………………….......... …………………………………………………………………………..........			
	Summe Teilaufgabe d)	**9**	

	Summe insgesamt	**28**	

Aufgabe 2: Persönliche Leistungskurve

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	berechnet Fraukes subjektive Leistungsfähigkeit um 9:00 Uhr und um 15:00 Uhr.	4	
sachlich richtige Alternativen: (4) ………………………………………………………………………….......... …………………………………………………………………………..........			
	Summe Teilaufgabe a)	**4**	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	berechnet die Ableitungen f' und f''.	2	
2	weist rechnerisch nach, dass Frauke um 10:00 Uhr mit dem Skalenwert 8 ihr persönliches Leistungshoch erreicht.	6	
sachlich richtige Alternativen: (8) ………………………………………………………………………….......... …………………………………………………………………………..........			
	Summe Teilaufgabe b)	**8**	

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	ermittelt den Zeitpunkt im Zeitraum von 8:00 Uhr bis 15:00 Uhr, an dem die subjektive Leistungsfähigkeit von Frauke am stärksten abnimmt.	4	
2	bestimmt den Zeitpunkt im Zeitraum von 8:00 Uhr bis 15:00 Uhr, an dem ihre subjektive Leistungsfähigkeit am stärksten zunimmt.	3	
sachlich richtige Alternativen: (7) ………………………………………………………………………….......... …………………………………………………………………………..........			
	Summe Teilaufgabe c)	**7**	

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	(1) beschreibt, in welcher Weise sich der Graph von g durch zwei Verschiebungen des Graphen von f parallel zu den Koordinatenachsen ergibt.	2	
2	(2) gibt eine Funktionsgleichung von g an.	2	
sachlich richtige Alternativen: (4) ……………………………………………………………………………............ ……………………………………………………………………………............			
	Summe Teilaufgabe d)	**4**	

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	(1) skizziert einen möglichen Verlauf der Leistungskurve von Hans.	3	
2	(2) entscheidet begründet, ob es sich bei der Leistungskurve von Hans um den Graphen einer Funktion 3. Grades handeln kann.	2	
sachlich richtige Alternativen: (5) ……………………………………………………………………………............ ……………………………………………………………………………............			
	Summe Teilaufgabe e)	**5**	

	Summe insgesamt	**28**	

Festlegung der Gesamtnote

	Lösungsqualität	
	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
Übertrag der Punktsumme aus der ersten Aufgabe	**28**	
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten Aufgabe	**28**	
Gesamtpunktzahl	**56**	

Note

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Noten zu den Punktsummen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Erreichte Punktsummen
sehr gut	49 – 56
gut	41 – 48
befriedigend	33 – 40
ausreichend	24 – 32
mangelhaft	12 – 23
ungenügend	0 – 11