Probeklausur LK13 1.Halbjahr 2. Klausur Lineare Algebra&Analytische Geometrie WAL 11.2006

Aufgabe 1

Gegeben ist die Ebenenschar E_t: $x_1 + t \cdot x_2 = 0$.

Stellen Sie E_t in Parameterform dar.

Zeigen Sie: E_t enthält die x_3-Achse für alle $t \in R$.

Beweisen Sie: Für $t \neq 0$ wird jede Ebene der Schar von jeder zur x_2-Achse parallelen Geraden geschnitten.

Erläutern Sie die Lage von E_0.

Aufgabe 2

1.1.3 Würfelschnitte *LK*

Die Punkte O(0|0|0), A(4|0|0), B(0|4|0), C(0|0|4) und F(4|4|4) sind Eckpunkte eines Würfels.

a) Die Ebene E: $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ schneidet den Würfel in einem Sechseck.
Zeichnen Sie den Würfel und das Sechseck in ein Koordinatensystem.
Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC und das Sechseck den gleichen Umfang haben.

b) Für welche Werte von a schneidet die Ebenenschar E_a: $x_1 + x_2 + x_3 = a$ den Würfel?
Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Anzahl der Ecken der Schnittfigur und den Werten von a ?

c) Gibt es Ebenen außerhalb der Schar E_a , die den Würfel in einem Fünfeck schneiden?

Aufgabe 3

1.2.3 Pyramidenschar *LK*

Die Punkte O(0|0|0), A(8|0|0), B(0|4|0) und $C_k(0|k|6)$ sind die Eckpunkte der Pyramidenschar $OABC_k$.

a) Es wird die Pyramide $OABC_0$ betrachtet.
Zeichnen Sie ein Schrägbild dieser Pyramide.
Bestimmen Sie die Innenwinkel des Dreiecks ABC_0 , den Schnittwinkel der Fläche ABC_0 mit der x_1-x_2-Ebene und den Abstand dieser Ebene vom Ursprung.

b) Es wird die Pyramidenschar $OABC_k$ betrachtet.
Ermitteln Sie die Einsetzungen für k, für die das Dreieck ABC_k gleichschenklig ist.
Wo liegen alle Punkte C_k ?
Zeichnen Sie die Punkte C_k in das vorhandene Schrägbild ein.
Untersuchen Sie die Lage der Geradenschar g_{AC_k} durch die Punkte A und C_k .
Untersuchen Sie die Größe des Pyramidenvolumens allgemein in Abhängigkeit von k und erläutern Sie Ihr Ergebnis.

c) Behauptung: Wenn ein Vektor $\vec{a}$ sowohl zu einem Vektor $\vec{b}$ als auch zu einem Vektor $\vec{c}$ senkrecht steht, so steht der Vektor $\vec{a}$ auch senkrecht zum Summenvektor $\vec{b} + \vec{c}$.
Erläutern Sie die Behauptung am Beispiel der Pyramidenschar und beweisen Sie die Behauptung.
Beweisen oder widerlegen Sie die Umkehrung der Behauptung.

Aufgabe 4

1.2.4 Supermärkte *LK*

In der Nähe der zwei Supermärkte Altkauf (A) und Billigkauf (B) wird ein neuer Supermarkt Neukauf (N) eröffnet. Bisher waren die beiden Supermärkte A und B die einzigen größeren Einkaufsmärkte in der Umgebung. Altkauf hatte einen Marktanteil von 60 % und Billigkauf einen Marktanteil von 40 %.
Ein Marktforschungsunternehmen erhält den Auftrag, die zukünftigen Marktpositionen zu analysieren. Die Marktforschungsabteilung des neuen Supermarktes N rechnet mit folgenden wöchentlichen Kundenwanderungen (d. h. Anteil der Kunden, die pro Woche von einem Markt zu einem anderen wechseln):
In jeder Woche werden 20 % der bisherigen Kunden von Altkauf zu Neukauf und 30 % der Billigkauf-Kunden zu Neukauf wechseln. Außerdem werden 10 % der Neukauf-Kunden wieder zu Altkauf und weitere 10 % zu Billigkauf wechseln.

a) Veranschaulichen Sie die Kundenwanderungen in einem Übergangsgraphen.

Erläutern Sie, dass die Kundenwanderung durch die Übergangsmatrix
$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ beschrieben wird.

Welchen Marktanteil hätte jeder der drei Märkte bei der ermittelten Kundenwanderung nach 2 Wochen?

Aufgabe 5

Dreieckspyramide

Gegeben sind die Punkte
A(- 6 ; 8 ; 7) , B(- 3 ; - 4 ; 4) , C(1 ; - 8 ; 6) und D(9 ; - 4 ; - 2) .

a) Ermitteln Sie die Koordinatenform der Ebene E, die durch die drei Punkte A, B und C gegeben ist. (mögliches Ergebnis: $2x + y - 2z = -18$)

b) Geben Sie die Schnittpunkte S_x, S_y und S_z der Ebene E mit den Koordinatenachsen an und zeichnen Sie das Dreieck $S_xS_yS_z$ in ein Koordinatensystem ein.
(1 LE ≅ 0,5 cm, Verkürzungsfaktor in x-Richtung $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$)

c) Zeigen Sie, dass der Punkt D außerhalb der Ebene E liegt und berechnen Sie den Abstand des Punktes D von der Ebene E.

d) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes D‘, den man durch Spiegelung des Punktes D an der Ebene E erhält.

e) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC sowie das Volumen der Dreieckspyramide, die das Dreieck ABC gemeinsam mit dem Punkt D bildet.

f) Durch $h_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1+2k \\ 2-2k \\ 2+k \end{pmatrix}$ (t, k ∈ R) ist eine Geradenschar mit dem gemeinsamen Punkt A gegeben. Zeigen Sie, dass alle Geraden der Schar in der Ebene E liegen.

g) Entscheiden Sie, ob die Gerade AC eine Gerade der obigen Geradenschar h_k ist.

h) Berechnen Sie den Schnittwinkel, den die Gerade AC mit der Geraden h_5 einschließt.