

## **Sammlung von Klausuraufgaben**

### **- Anregungen für den Mathematikunterricht -**

Bei diesen Aufgaben handelt es sich um für das dezentrale Abitur 2006 bei den Bezirksregierungen eingereichte und dort genehmigte Aufgaben. Die Aufgaben sind in Bezug auf ihren Umfang und ihre Schwierigkeit für Kurse optimiert, welche die Kurslehrerinnen und -lehrer unterrichtet haben; damit haben sie einen deutlichen Bezug zu jeweils einer konkreten Lerngruppe. Die Originalformatierungen sind weitgehend beibehalten. Wir bedanken uns herzlich bei den Kolleginnen und Kollegen, die diese Aufgaben erstellt haben.

Die Aufgaben wurden für diesen Reader überarbeitet. Insbesondere wurden sie gekürzt, wenn Teile nicht zu den Vorgaben für das Zentralabitur passen. Es wurde darauf geachtet, dass die verbindlich vorgegebenen Operatoren in den Aufgabenstellungen verwendet werden; ggf. wurden diese ergänzt.

Die Aufgaben dienen als Anregung für den Unterricht und decken weitgehend alle curricularen Aspekte der Vorgaben ab. Die Sammlung hat nicht den Anspruch, Aufgaben für das Zentralabitur 2007 in Bezug auf ihre Schwierigkeit und ihren Umfang abzubilden. Sie illustriert aber das Spektrum möglicher Anforderungen und möglicher Formulierungen für Aufgaben (unter Verwendung der Operatoren) und Teilaufgaben. Zudem berücksichtigt sie die zulässigen Werkzeuge wissenschaftlicher Taschenrechner (WTR), grafikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Computeralgebrasysteme (CAS). Gemäß den Vorgaben wird bei der Kennzeichnung der Aufgaben nur zwischen WTR (ohne und mit Graphikfähigkeit) und CAS unterschieden.

In der folgenden Tabelle wird eine Übersicht gegeben:

Nr.	Sachgebiet	Kursart	TR	Thema	Titel	Seite
1	A	Gk	CAS	e-Funktion	Brücke großer Belt	3
2	A	Gk	CAS	e-Funktion	Forellenzucht	4
3	A	Gk	CAS	ganzrat. Funktion	Verkehrszählung	6
4	A	Gk	CAS	ganzrat. Funktion	Tunnel	8
5	A	Gk	WTR	kombinierte Funktion	Graph $f, f', F$	10
6	A	Gk	WTR	e-Funktion	Arzneimittelkonzentration	11
7	A	Gk	WTR	ganzrat. Funktion	LipNature	12
8	A	Gk	WTR	kombinierte Funktion	Kombi	13
9	A	Gk	WTR	kombinierte Funktion	Stausee	14
10	A	Gk	WTR	kombinierte Funktion	Wellnessliege	15
11	A	Gk	WTR	ganzrat. Funktion	Umgehungsstraße	17
12	A	Lk	CAS	gebr.-rat. F-Schar	Funktionenschar	18
13	A	Lk	WTR	ganzrat. F-Schar	Flächenstrategien	19
14	A	Lk	WTR	e-Funktion	Fischbestand	20
15	A	Lk	WTR	ganzrat. F-Schar	Olympiaschanze Garmisch	21
16	LAG	Gk	WTR	vektorielle Geometrie	Tennis	23
17	LAG	Gk	WTR	Übergangsmatrizen	Insektenpopulation	25
18	LAG	Gk	WTR	vektorielle Geometrie	vektorielle Geometrie	26
19	LAG	Lk	CAS	Abbildungsmatrizen	Abbildungen	27
20	LAG	Lk	CAS	Übergangsmatrizen	Krankheit	28
21	LAG	Lk	WTR	vektorielle Geometrie	Flugbahnen	30
22	LAG	Lk	WTR	Übergangsmatrizen	Ödnis im Osten	31
23	LAG	Lk	WTR	Übergangsmatrizen	Bevölkerungsentwicklung	32
24	LAG	Lk	WTR	vektorielle Geometrie	Dreieckspyramide	33
25	LAG	Lk	WTR	Übergangsmatrizen	Münzwanderung	34
26	St	Gk	CAS	ohne Test	Straßenbahn	35
27	St	Gk	WTR	mit Test	Spielautomat Lucky Fruit	37
28	St	Gk	WTR	mit Test	Rußfilter	38
29	St	Lk	CAS	ohne Test	Telefonvertrag	39
30	St	Lk	WTR	ohne Test	Onliner-Atlas	41
31	St	Lk	WTR	ohne Test	Kinderglück	43

Aufg.-Nr.: 1	Bereich: e-Funktionen	Kursart: GK	CAS
--------------	-----------------------	-------------	-----

## **Brücke Großer Belt**

Mitte 1998 wurde in Dänemark eine Verbindung über den Großen Belt eingeweiht. Hauptbestandteil ist die Ostbrücke – eine 6790 Meter lange Hängebrücke – mit einer Spannweite von 1624 m zwischen zwei Pfeilern. Die Durchfahrtshöhe für den Schiffverkehr beträgt 65m, die Spitzen der Pfeiler bilden mit 254 m Höhe über dem Meeresspiegel die größte Erhebung Dänemarks.

(Informationen aus [www.storebaelt.dk](http://www.storebaelt.dk)).



Der tiefste Punkt des Kabels zwischen den beiden Pfeilerspitzen liegt ca. 3m über der Fahrbahn.  
(Quelle der Fotos: [www.brueckenweb.de](http://www.brueckenweb.de))

- (a) In einem geeigneten Koordinatensystem lässt sich die Lage des Kabels zwischen den beiden Pfeilern durch eine Parabel darstellen. Ermitteln Sie eine mögliche Funktionsgleichung.
- (b) Das Kabel lässt sich annähernd auch durch den Graphen der Funktion  $g$  mit
- $$g(x) = a \cdot (e^{b \cdot x} + e^{-b \cdot x}) \quad \text{mit } a, b > 0$$
- beschreiben. Bestimmen Sie  $a$  und  $b$ .

Als mögliche Funktionsterme kann man in (a) und (b)

$$f(x) = 0,000282 \cdot x^2 + 3 \quad \text{und} \quad g(x) = 1,5 \cdot (e^{0,000596 \cdot x} + e^{-0,000596 \cdot x})$$

erhalten.

- (c) Stellen Sie mit Hilfe des CAS beide Graphen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar, skizzieren Sie den Verlauf in Ihren Klausurunterlagen und vergleichen Sie beide Modellierungen.
- (d) Berechnen Sie in beiden Modellen die Steigung des Kabels an den Pfeilerspitzen und vergleichen Sie diese mit dem Verlauf des Kabels auf dem Foto.
- (e) Die senkrechten Tragseile haben einen Abstand von 27 m. Berechnen Sie in beiden Modellen die Länge des markierten Tragseiles und ermitteln Sie zum Vergleich die ungefähre Länge des Seiles Nr. 7 auf dem Foto bei Aufgabenteil (d).
- (f) Ermitteln Sie rechnerisch, an welcher Stelle sich bei der Berechnung der Längen der senkrechten Tragseile die größten Unterschiede bei beiden Modellen ergeben.



Aufg.-Nr.: 2	Bereich: e-Funktion	Kursart: GK	CAS
--------------	---------------------	-------------	-----

## Forellenzucht

- In einer Forellenzuchtanstalt im Sauerland wurde bei gleichaltrigen Forellen die durchschnittliche Länge ermittelt. Die Tabelle zeigt einen Teil der gewonnenen Daten:

Alter (in Monaten)	0	2	5	8	10
Länge (in cm)	0,2	9,8	17,8	21,6	22,9

- Ausgewachsene Forellen erreichen nach zwei Jahren eine durchschnittliche Länge von 25 cm.

- a) Begründen Sie, warum man beim Wachstum von Forellen von begrenztem Wachstum sprechen kann.
- b) Ermitteln Sie aus den Daten eine Funktion  $f_1$ , die die durchschnittliche Länge von Forellen zur Zeit  $t$  beschreibt und skizzieren Sie den Graphen auf dem vorbereiteten Arbeitsblatt.

( zur Kontrolle: Man erhält näherungsweise  $f_1(t) = 25 - \frac{124}{5} \cdot e^{-0,247x}$  )

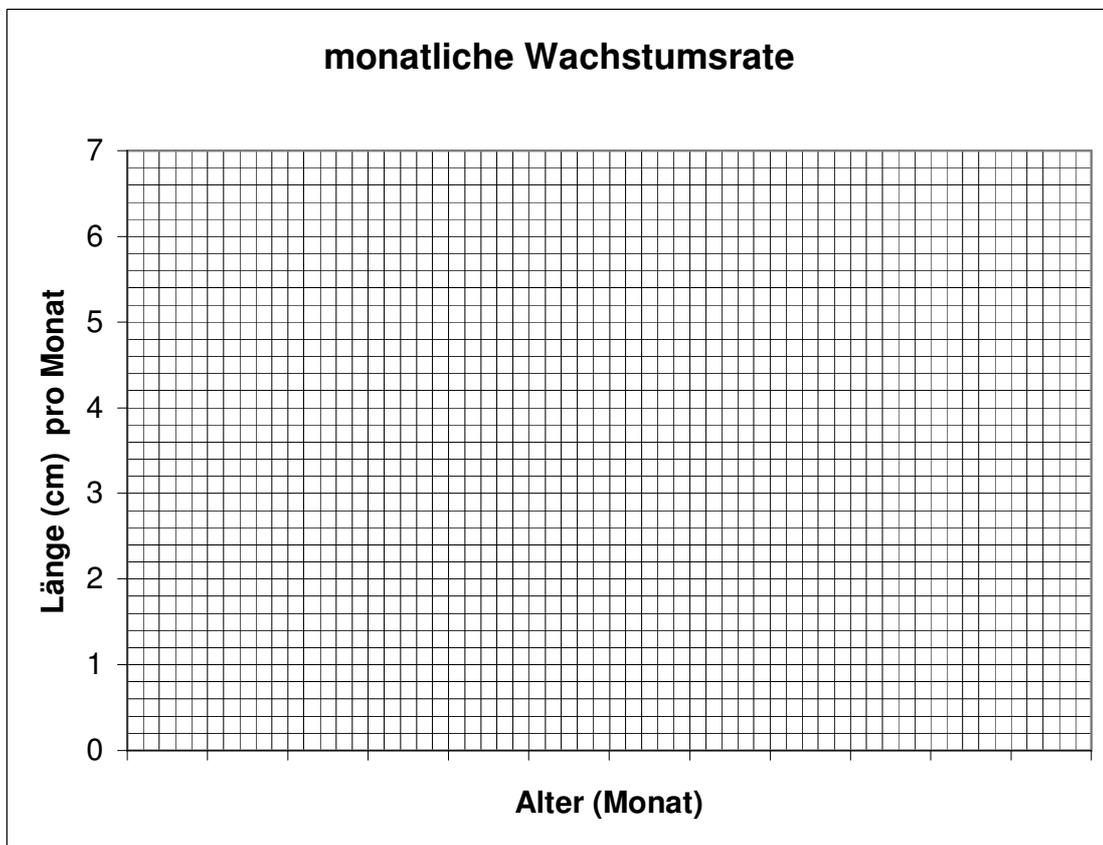
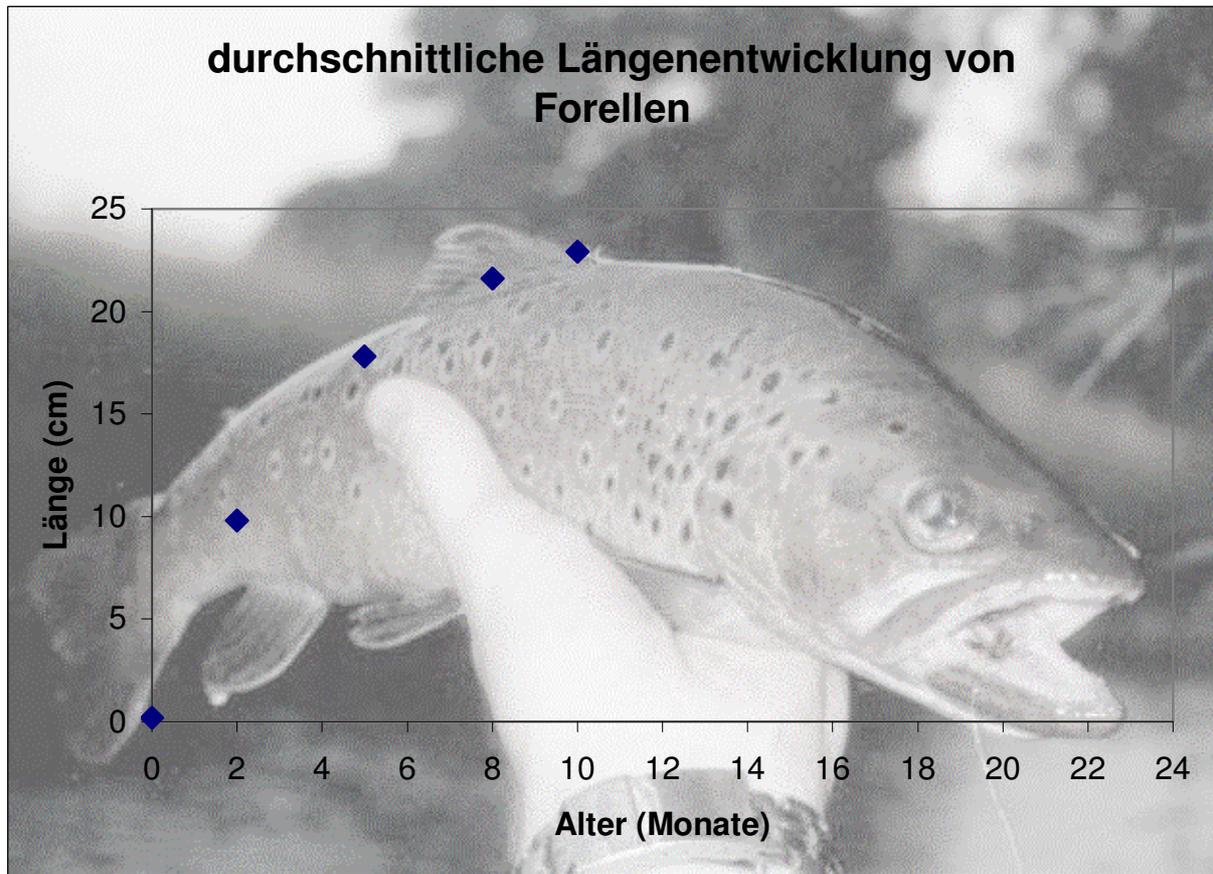
- c) Berechnen Sie auf der Grundlage von  $f_1$  die durchschnittliche Wachstumsrate für den 4. Monat.

- In einer Versuchsanstalt im Siegerland hat ein Biologe eine einzelne Forelle beobachtet und jeweils das Wachstum pro Monat aufgezeichnet. Folgende Daten sind vorhanden:

Alter (in Monaten)	1	4	6	8
Längenwachstum pro Monat (in cm)	5,5	2,6	1,6	1

- d) Bestimmen Sie für die Forelle aus dem Siegerland eine ganzrationale Funktion  $h_1$ , die jedem Monat die Wachstumsrate zuordnet. Der zugehörige Graph bis zum 24. Monat ist bereits auf dem zugehörigen Arbeitsblatt eingezeichnet.
- e) Machen Sie einen exponentiellen Ansatz ( $h_2$ ) und zeichnen Sie den Graphen in dasselbe Koordinatensystem. Falls Sie die Aufgabe nicht lösen können, arbeiten Sie mit  $h_2(x) = 7 \cdot e^{-0,2497x}$  weiter.
- f) Untersuchen Sie die Güte der beiden Modellierungsansätze.
- g) Rechnen Sie auf der Grundlage von  $h_2$  nach, dass der Fisch aus dem Siegerland ein großes Exemplar war.
- h) Bestimmen Sie eine Funktion  $h_3$ , die die Länge des Fisches aus dem Siegerland zur Zeit  $t$  beschreibt. Gehen Sie dabei davon aus, dass seine Länge beim Schlüpfen auch 0,2 cm gewesen ist.

**Arbeitsblatt** zur Aufgabe Forellenzucht



Aufg.-Nr.: 3	Bereich: ganzrat. Funktion	Kursart: GK	CAS
--------------	----------------------------	-------------	-----

### Verkehrszählung am Hauptbahnhof

Im Zusammenhang mit der Diskussion um die Feinstaubbelastung am Graf-von-Galen-Ring in Hagen wurden auch umfangreiche Verkehrszählungen durchgeführt.

Ich habe die meisten Zahlen, die bei der Diskussion im Umweltausschuss genannt wurden, nicht behalten, aber an folgende Datenlage erinnere ich mich noch: An einen Wochentag hatten wir um 0 Uhr morgens eine Verkehrsdichte von 400 Kfz/h, der höchste Wert lag um 8 Uhr bei 2100 Kfz/h. Danach sank die Verkehrsdichte bis 14 Uhr auf 1600 Kfz/h und stieg dann wieder auf ein Zwischenhoch um 17 Uhr.

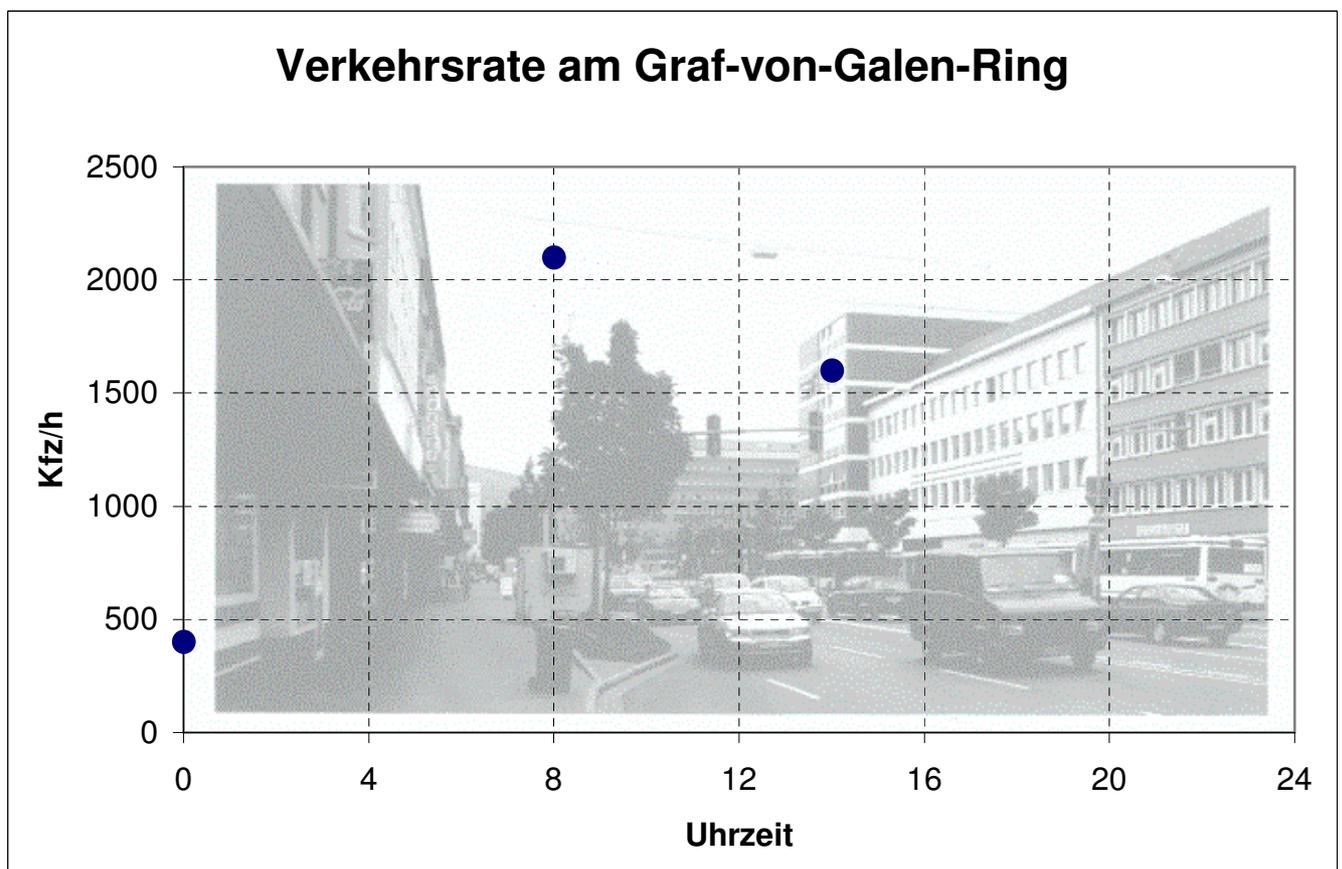
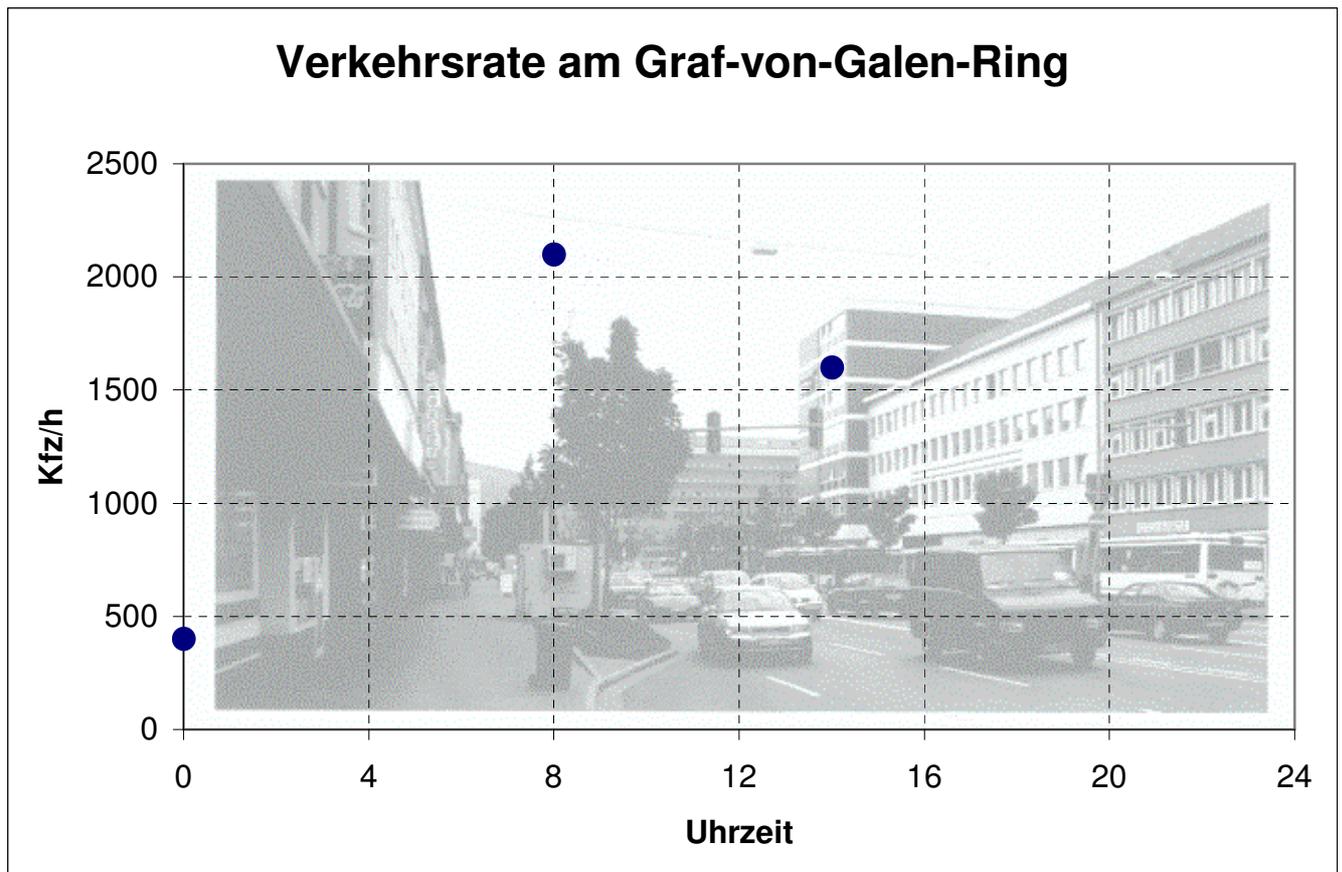
- a) Skizzieren Sie auf dem beiliegenden Arbeitsblatt (obere Grafik) auf der Basis der obigen Angaben einen möglichen Verlauf der Funktion, die die Verkehrsdichte am Graf-von-Galen-Ring beschreibt.
- b) Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion, die die Verkehrsdichte (in Kfz/h) in Abhängigkeit von der Tageszeit (in h) gemäß den oben angegebenen Daten modelliert.

*Falls Sie die Funktion nicht bestimmen können, arbeiten Sie mit  $f(x) = -0,0466x^5 + 2,3167x^4 - 40,07x^3 + 265,2x^2 - 340x + 400$  weiter.*

Fertigen Sie eine Skizze der Funktion auf dem beiliegenden Arbeitsblatt (untere Grafik) an.

- c) Bestimmen Sie
  - i. die höchste vorkommende Verkehrsdichte des Tages
  - ii. die Uhrzeit, zu der die Verkehrsdichte am schnellsten zunimmt.
- d) Zeigen Sie, dass die Funktion mindestens in einem Bereich den Sachzusammenhang nicht beschreibt. Ermitteln Sie für diesen Bereich eine Ersatzfunktion  $g$ , die folgende Bedingungen erfüllen soll: Um 18.00 soll der Funktionswert und die Steigung genau so groß sein, wie bei der Funktion  $f$  aus Teilaufgabe a), und um 24.00 soll wieder eine Verkehrsdichte von 400 Kfz/h erreicht sein. Zeichnen Sie die Ersatzfunktion in einer anderen Farbe ebenfalls auf dem Arbeitsblatt ein.
- e) Aus früheren Zählungen weiß man, dass die durchschnittliche tägliche Verkehrsstärke DTV (= Anzahl der Fahrzeuge, die die Straße innerhalb 24 Stunden befahren) am Graf-von-Galen-Ring bei 34000 Kfz liegt. Veranschaulichen Sie den DTV-Wert auf dem Arbeitsblatt und überprüfen Sie rechnerisch, ob der Wert durch die beiden Funktionen  $f$  (bis 18.00 h) und  $g$  (ab 18.00 h) gut modelliert wird.
- f) Berechnen Sie den prozentualen Anteil der Fahrzeuge, die nach der Modellierung schon bis 9.00 h den Graf-von-Galen-Ring befahren haben.

Arbeitsblatt zur Aufgabe „Verkehrsbelastungen am Graf-von-Galen-Ring“



Aufg.-Nr.: 4	Bereich: ganzrat. Funktion	Kursart: GK	CAS
--------------	----------------------------	-------------	-----

## Tunnel

Nach dem nebenstehenden Foto soll ein Tunnel errichtet werden.

Man interessiert sich für die Gestaltung des Eingangs (Portal), sucht eine geeignete Funktion, die den gekrümmten Verlauf möglichst passend beschreibt.



**Betrachten Sie nun die beigelegte Skizze auf dem separaten Blatt.** Dazu hat man die 6 Punkte A bis F mit ihren Koordinaten ermittelt. Sie dienen als Rechenbasis.

- a) Mit A, D und F erstellt man eine Parabel (2. Ordnung). Bestimmen Sie den Term geeignet, lösen Sie Ihre Gleichungen per Hand.  
(zur Kontrolle:  $f(x) = -0.07x^2 + 0.75x + 8$ )
- b) Zur weiteren Diskussion der Ingenieure stehen eine Funktion 3. Grades (mit A, C, D und F) sowie eine Funktion 4. Grades (mit A, C, D, E und F) zur Auswahl.  
Erstellen Sie für jede Funktion die jeweiligen Bestimmungsgleichungen und bestimmen Sie die gesuchten Terme der beiden Funktionen (mit dem CAS).

(zur Kontrolle:  $g(x) = -\frac{1}{350}x^3 - \frac{19}{700}x^2 + \frac{17}{28}x + 8$ ;

$$h(x) = \frac{101}{50400}x^4 - \frac{109}{2800}x^3 + \frac{8227}{50400}x^2 + \frac{103}{336}x + 8$$

- c) Übertragen Sie die drei mit Hilfe des CAS ermittelten Graphen als Skizze (Unterschiede sollen deutlich werden!) in Ihre Unterlagen.
- d) Der Tunnel soll seine größte Höhe in der Mitte der Fahrbahn haben. Bestimmen Sie diejenige Funktion (f, g oder h), die diese Bedingung am „genauesten“ erfüllt. Erläutern Sie Ihr Verfahren.
- e) Man entscheidet sich für g als Randfunktion: Bestimmen Sie das Luftvolumen, das dann der 130 m lange Tunnel hat.
- f) Nun sucht man den oberen Rand des Tunnels (h(x)) als „Parallele“ zu g:

$$h(x) = g(x) + c.$$

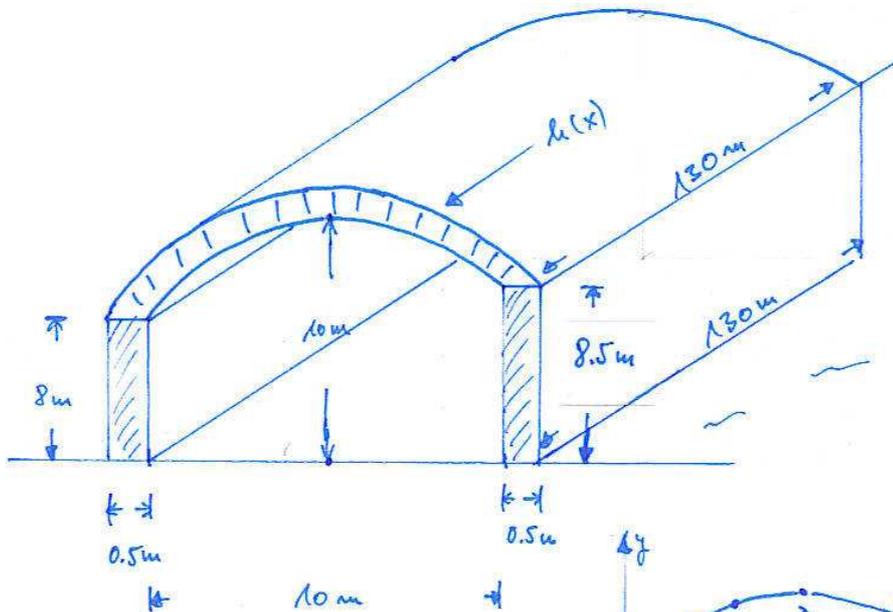
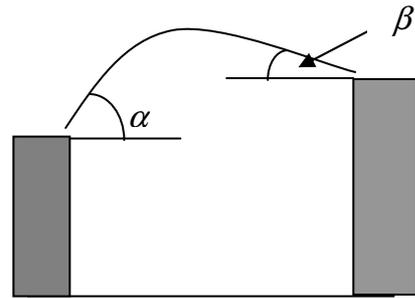
h ist also „etwas“ nach oben verschoben im Vergleich zu g.

Der obere Rand soll aber – wie in der Skizze zu sehen - rechts und links auf den  $\frac{1}{2}m$

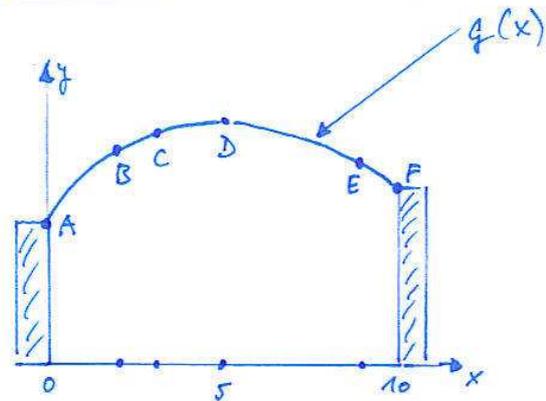
breiten Mauern aufliegen. Geben Sie ein Verfahren an, um den möglichst exakten Term für h zu finden. (Verwenden Sie nur Zehntel-Veränderungen für den Wert von c).

- g) Sollten Sie bei f) kein Ergebnis haben, so verwenden Sie für den oberen Rand die Verschiebung  $c=0.4$ .  
Berechnen Sie für diesen Fall das Betonvolumen für den gewölbten Tunneldeckel.

h) Die bisher betrachteten Funktionen  $f$ ,  $g$  und  $h$  erscheinen den Ingenieuren nicht geeignet, weil durch ihre Form der Betondeckel „zu flach“ auf den Seitenmauern aufliegt. Geben Sie die Winkelgrößen für  $\alpha$  und  $\beta$  an, die bisher durch die drei Funktionen  $f$ ,  $g$  und  $h$  erzeugt wurden.



A(0|8) B(2|9) C(3|9.5)  
 D(5|10) E(9|8.75) F(10|8.5)



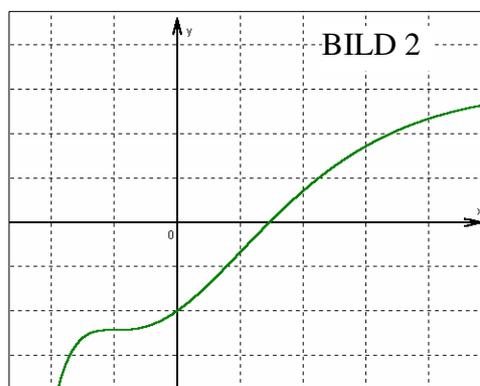
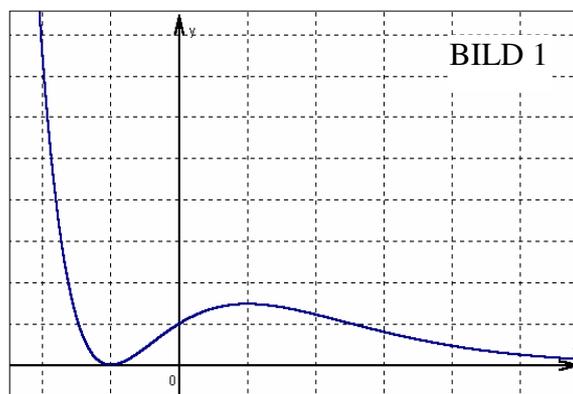
Alle Angaben in Metern (m)!

## Graph f, f', F

Gegeben ist die Exponentialfunktion f mit der Gleichung

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot e^{-x} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

- a) Bestimmen Sie für die Funktion f die Achsendurchschlagspunkte, das Verhalten im Unendlichen und die relativen Extrema.
- b) Gegeben sind die Graphen *der Funktion f*, der Graph *ihrer Ableitungsfunktion f'* und der Graph *einer Stammfunktion F* von f. Begründen Sie *möglichst vielseitig*, dass nur Bild 1 den Graphen von f darstellen kann. Entscheiden Sie, welcher Graph f' und welcher Graph F darstellt und begründen Sie Ihre Entscheidung!



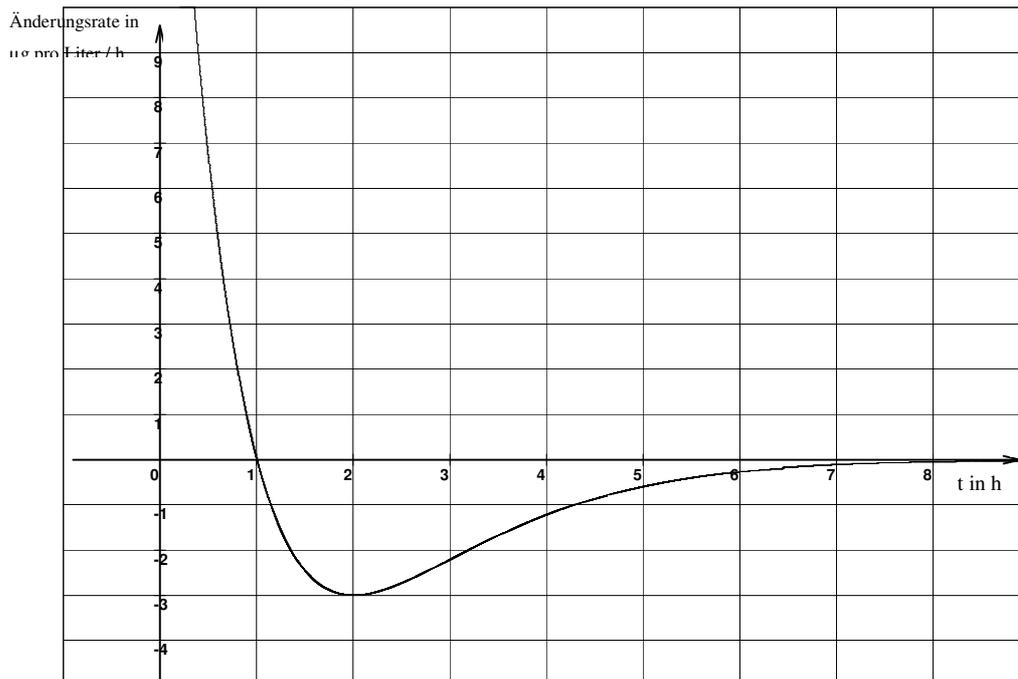
- c) Der Graph von f schließt im 1. Quadranten mit der x-Achse eine Fläche ein.
1. Zeigen Sie, dass die Funktion F mit  $F(x) = (-x^2 - 4x - 5) \cdot e^{-x} + 3$  eine Stammfunktion zu f ist.
  2. Berechnen Sie den Inhalt der oben beschriebenen Fläche.
  3. Zeichnen Sie in das Bild mit dem Graphen der Funktion f den Graphen der Funktion g mit  $g(x) = e^{-x}$  ein. Dieser Graph teilt die in c2 berechnete Fläche. Berechnen Sie das Teilverhältnis.

- d) Gegeben ist das Integral  $\int_{-2}^b (f(x) - g(x)) dx$ . Für immer größer werdende Werte von b nähert sich der Integralwert dem Wert 0. Interpretieren Sie dieses Ergebnis hinsichtlich der von den Graphen der Funktionen f und g *insgesamt* eingeschlossenen Fläche?

Aufg.-Nr.: 6	Bereich: e-Funktion	Kursart: GK	WTR
--------------	---------------------	-------------	-----

### Arzneimittelkonzentration

Bei einer Arznei, z.B. einer Tablette, steht die Wirkung (z.B. Schmerzlinderung o.ä.) in direktem Zusammenhang mit der Konzentration des in der Arznei enthaltenen Wirkstoffes im Blut, d.h., bei hoher Konzentration des Wirkstoffes verspürt der Patient eine intensive Wirkung. Die Konzentration des Wirkstoffes im Blut wird in  $\mu\text{g}$  pro Liter angegeben. Die nachfolgende Graphik zeigt die Änderungsrate der Konzentration in  $\mu\text{g}$  pro Liter je Stunde in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  in h. Dabei ist  $t$  die Zeit in h seit Beginn der Einnahme ( $t = 0$ ).



- Geben Sie die Zeitintervalle an, in denen die Wirksamkeit zunimmt und die Zeitintervalle, in denen die Wirksamkeit abnimmt. Begründen Sie Ihre Aussagen.
- Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Konzentration des Wirkstoffes am größten ist und begründen Sie Ihr Ergebnis.
- Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Abnahme der Konzentration am größten ist und begründen Sie Ihr Ergebnis.
- Die Wirksamkeit der Arznei wird durch die Funktion  $f$  mit der Funktionsgleichung

$$f(t) = 3t \cdot e^{2-t}; \quad t \geq 0$$

beschrieben. Dabei beschreibt  $f(t)$  die Konzentration des Wirkstoffes im Blut (gemessen in  $\mu\text{g}$  pro Liter) zur Zeit  $t$  (gemessen in h seit der Einnahme). Weisen Sie unter Verwendung von  $f$  rechnerisch nach, dass Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe b korrekt ist. (Falls Sie b nicht gelöst haben, berechnen Sie nun den in b gesuchten Zeitpunkt). Berechnen Sie auch die Höhe der Konzentration zu diesem Zeitpunkt.

- Begründen Sie, dass das Vorzeichen von  $f'$  durch den Term  $3 - 3t$  bestimmt wird, und erklären Sie mit Hilfe dieser Aussage nachträglich den Verlauf des abgebildeten Graphen.
- Beschreiben Sie den zeitlichen Verlauf der Wirksamkeit der Arznei.

Aufg.-Nr.: 7	Bereich: ganzrat. Funktion	Kursart: GK	WTR
--------------	----------------------------	-------------	-----

## Lipnature

Die Kosmetikfirma „lipnature“, die sich auf die Produktion von Lippenpflegeprodukten spezialisiert hat, möchte ein neues Firmenlogo entwerfen. Die PR-Abteilung der Firma schlägt dem Vorstand vor, dem neuen Firmenlogo die Form eines „Kussmundes“ zu verleihen.

Die Umrandung der Oberlippe entspricht dem Graphen einer achsensymmetrischen Funktion vierten Grades ( $f_1$ ), welche an der Stelle  $x_0 = 4$  eine Nullstelle und an der Stelle  $x_E = -2$  ein relatives Extremum besitzt. Zudem schneidet der Graph die y-Achse an der Stelle  $y_s = 2$ .

Für die Randlinie der Unterlippe soll der Graph einer quadratischen Funktion  $f_2$  benutzt werden, die durch die Funktionsgleichung  $f_2(x) = \frac{1}{8}x^2 - 2$  gegeben ist.

- a) Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion  $f_1$ , welche die Randlinie der Oberlippe beschreibt.

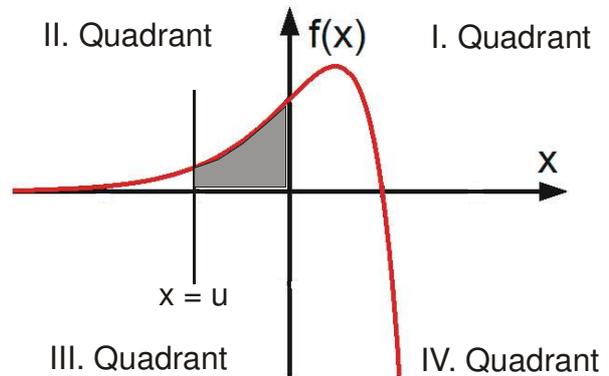
(Zur Kontrolle:  $f_1(x) = -\frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + 2$ .)

- b) Bestimmen Sie die gemeinsamen Schnittpunkte der Funktionen  $f_1$  und  $f_2$ .
- c) Bestimmen Sie alle relativen Extrempunkte sowie Wendepunkte der Funktion  $f_1$ .
- d) Skizzieren Sie das Firmenlogo.
- e) Berechnen Sie den Flächeninhalt des „Kussmundes“.
- f) Die PR-Abteilung der Kosmetikfirma schlägt vor, den Firmennamen „lipnature“ als Schriftzug so in den Kussmund zu integrieren, dass er in einem Rechteck zwischen der x-Achse und der Unterlippenrandlinie erscheint. Berechnen Sie die Maße des entsprechenden Rechtecks maximalen Flächeninhalts und geben Sie zudem die Flächenmaßzahl an.
- g) Die Fläche des in Teilaufgabe f) ermittelten Rechtecks reicht nicht aus, um den Firmennamen angemessen darin unterbringen zu können. Nun soll die Gleichung, welche die Unterlippenrandlinie beschreibt, derart verändert werden, dass die Nullstellen bei  $x_0 = \pm 4$  erhalten bleiben, aber die Lage des Scheitelpunkts auf der y-Achse variieren kann. Zeigen Sie, dass alle möglichen Unterlippenrandlinien durch eine allgemeine Funktion  $f_k$  mit  $f_k(x) = kx^2 - 16k$  ( $k \in \mathbb{R}^{>0}$ ) wiedergegeben werden.

Aufg.-Nr.: 8	Bereich: kombinierte Funktion	Kursart: GK	WTR
--------------	-------------------------------	-------------	-----

### Innermathematische Aufgabe

In der Abbildung rechts ist der Graph der Funktion  $f$  zu  $f(x) = (1-x) \cdot e^{2x}$  dargestellt.



- Berechnen Sie die Nullstelle, den Extrem- und den Wendepunkt von  $f$ . Untersuchen Sie das Verhalten von  $f$  für  $x \rightarrow \infty$  und für  $x \rightarrow -\infty$ .  
Zur Kontrolle:  $f''(x) = -4xe^{2x}$ .
- Zeigen Sie, dass  $F(x) = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) \cdot e^{2x}$  eine Stammfunktion von  $f$  ist.
- Bestimmen Sie die Maßzahl der Fläche, die der Graph von  $f$  mit den Koordinatenachsen im I. Quadranten einschließt.
- Der Graph von  $f$  schließt im II. Quadranten mit den Koordinatenachsen und der Geraden zu  $x = u$ ,  $u < 0$ , eine Fläche ein, vgl. obige Abbildung. Bestimmen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts in Abhängigkeit von  $u$ . Ermitteln Sie den Wert der Maßzahl für  $u \rightarrow -\infty$  und interpretieren Sie diesen Wert geometrisch.
- Ein Punkt  $P$  bewegt sich im I. Quadranten auf dem Graphen von  $f$ . Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch  $P$  und die beiden Koordinatenachsen bilden ein Rechteck. Bestimmen Sie den maximalen Flächeninhalt eines solchen Rechtecks.

Aufg.-Nr.: 9	Bereich: kombinierte Funktion	Kursart: GK	WTR
--------------	-------------------------------	-------------	-----

## Stausee

Ein Stausee ändert seine Wassermenge. Zunächst wird er mit Wasser gefüllt. Die Zulaufatenfunktion ist gegeben

durch  $z(x) = (x^2 - 10x + 24)e^{\frac{1}{2}x}$ . Der Graph von  $z$  ist rechts abgebildet.

Dabei wird  $x$  in Tagen und  $z(x)$  in tausend Kubikmeter pro Tag angegeben.

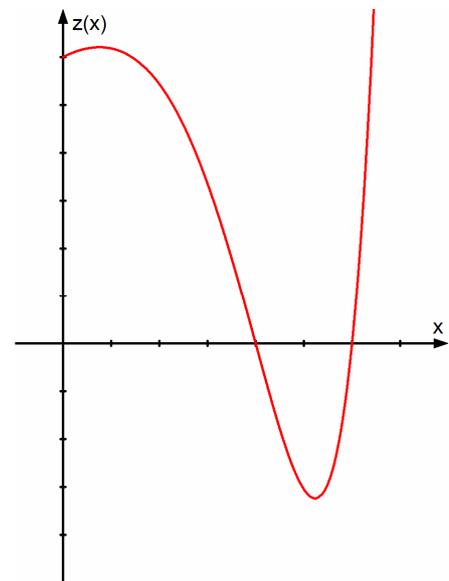
Betrachtet wird das Intervall  $[0;6,5]$ , d.h.:  $0 \leq x \leq 6,5$ .

Hinweis: Eine negative Zulaufate bedeutet, dass Wasser aus dem Stausee herausläuft.

Ohne eigene Herleitung dürfen Sie im Weiteren

$$z''(x) = \left( \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2 \right) e^{\frac{1}{2}x} \text{ und}$$

$$z'''(x) = \left( \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} \right) e^{\frac{1}{2}x} \text{ verwenden.}$$

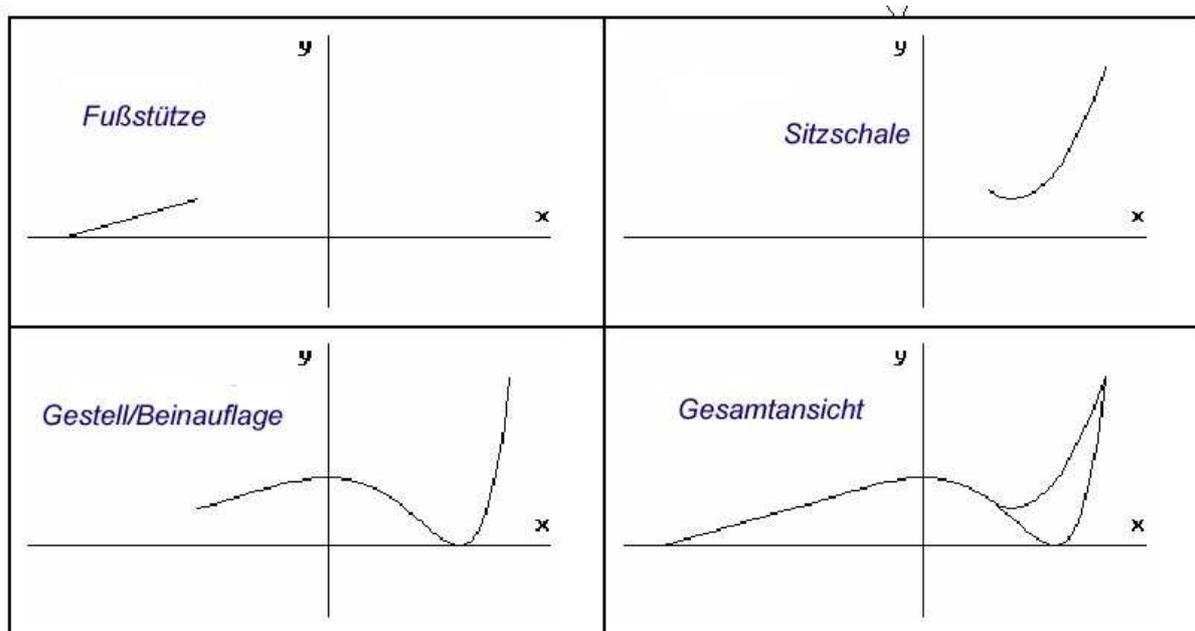


- Berechnen Sie die Zeitpunkte, zu denen das Wasser weder ein- noch abfließt. Geben Sie die Zeitintervalle an, in denen Wasser zu- bzw. abläuft.
- Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Zulaufate im betrachteten Intervall maximal ist.  
Zeigen Sie, dass  $z'(x) = \left( \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 \right) e^{\frac{1}{2}x}$  gilt.
- Ermitteln Sie, welche Aussagen über die Änderung der Wassermenge zum Zeitpunkt  $x = 5$  möglich sind.
- Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem sich die Zulaufate am stärksten ändert.
- Entscheiden Sie, ob es einen Zeitpunkt gibt, zu dem sich im Becken wieder die Anfangswassermenge befindet. Die Begründung soll ohne Rechnung erfolgen.
- In dem Stausee hat sich eine bestimmte Bakteriensorte eingelagert. Zum Zeitpunkt  $x = 0$  befinden sich bereits 5000 Bakterien im Stausee. Die Wachstumsratenfunktion der Bakterien ist gegeben durch  $w(x) = x^3 - 12x^2 + 35x$ . Dabei wird  $x$  wieder in Tagen angegeben und  $w(x)$  in 10.000 Bakterien pro Tag. Ermitteln Sie die Anzahl der Bakterien nach 3 Tagen.

Aufg.-Nr.: 10	Bereich: kombinierte Funktion	Kursart: GK	WTR
---------------	-------------------------------	-------------	-----

## Wellness-Liege

Im „WOLF-RENZ\_DESIGN\_ZENTRUM“ wird eine neue Generation an Wellness-Liegen entwickelt. Für das Topmodell „ABI 2006“ haben die Designer geschickt Ausschnitte aus verschiedenen Funktionsgraphen zusammengesetzt.



- a) Die Fußstütze ergibt sich als Verlängerung (Teil der Tangente) an das Gestell/Beinauflage  $g$ , wobei für  $g$  die Gleichung  $g(x) = \frac{1}{4}e^x \cdot (x-2)^2$  gilt.
- a1) Weisen Sie nach, dass für die 1. Ableitung von  $g$  gilt:  $g'(x) = \frac{1}{4}e^x \cdot (x^2 - 2x)$ .
- a2) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an  $g$ , wenn der Übergang an  $x = -2$  erfolgt.
- a3) Geben Sie den Bereich für  $x$  an, in dem die Tangente als Fußstütze genutzt werden kann.
- b) Als Sitzschale haben die Designer einen Ausschnitt aus der Parabel  $s$  (2. Ordnung) gewählt. Dabei haben sie für  $s$  die Gleichung  $s(x) = \frac{e}{4e-8}(x^2 - ex + 2e - 3)$  ermittelt.
- b1) Zeigen Sie, dass die Graphen von  $g$  und  $s$  an der Stelle  $x = 1$  knickfrei ineinander übergehen.
- b2) Berechnen Sie die exakte Stelle des tiefsten Punktes der Sitzschale. (Rechnungen mit  $e$ , keine Rundungen)

Aufg.-Nr.: 10	Bereich: kombinierte Funktion	Kursart: GK	WTR
---------------	-------------------------------	-------------	-----

c) Für die seitliche Verblendung des Bereichs zwischen Fußstütze, Gestell/Beinauflage und Erdboden ( $x$ -Achse) sollen spezielle bebürstete Aluminiumbleche zum Einsatz kommen, die aus rechteckigen Blechen herausgeschnitten werden. Hier gilt:  $1LE$  entspricht  $0,25m$ .

c1) Geben Sie mit Hilfe einer Schraffur die beschriebene Fläche in der Gesamtansicht an.

c2) Ermitteln Sie die Mindestlänge und die Mindestbreite, die das rechteckige Blech aufweisen muss.

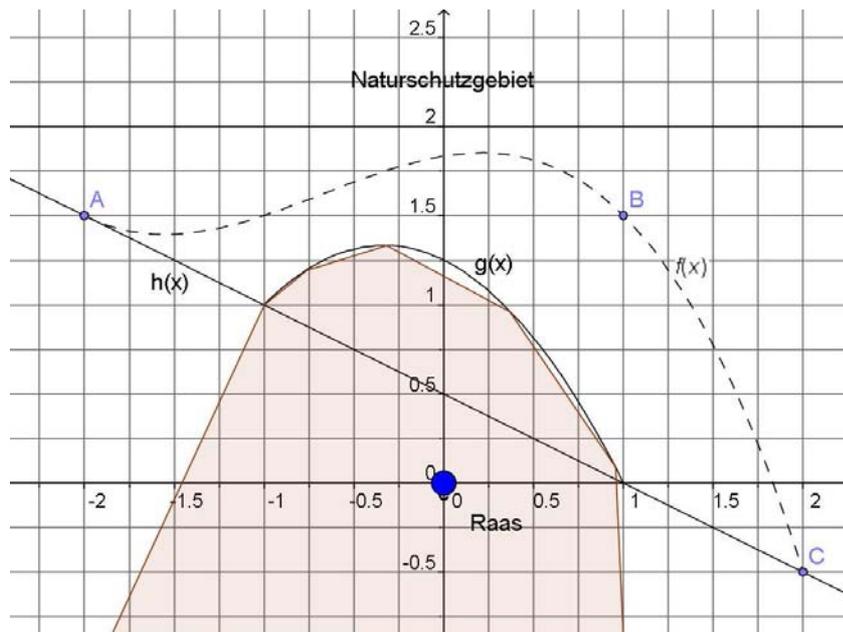
c3) Eine Stammfunktion der Funktion  $g$  lautet:

$$G(x) = \frac{1}{4} e^x \cdot (x^2 - 6x + 10)$$

Ermitteln Sie den Flächeninhalt eines fertig ausgeschnittenen Verblendungsblechs in  $m^2$ .

## Umgehungsstraße

Quer und schnurgerade durch den kleinen niederrheinischen Ort Raas geht eine vielbefahrene Bundesstraße. Die Bewohner des Ortes haben lange gekämpft, nun soll endlich die langersehnte Umgehungsstraße gebaut werden. Die Abbildung zeigt einen Kartenausschnitt, auf dem die alte Bundesstraße (Gerade durch die Punkte A und C) und der ungefähre Verlauf der neuen Umgehungsstraße (gestrichelte Kurve) eingezeichnet sind (alle Angaben in km).



- Bestimmen Sie aus der Grafik die lineare Funktion, die die alte Bundesstraße beschreibt.
- Die neue Umgehungsstraße soll im Punkt A „glatt“ an der alten Bundesstraße anschließen, sie soll durch den Punkt B gehen und am Punkt C unter einem beliebigen Winkel wieder auf die Bundesstraße treffen. Bestimmen Sie mit Hilfe der Skizze und den genannten Bedingungen eine ganz-rationale Funktion dritten Grades, die die Umgehungsstraße zwischen den Anschlusspunkten beschreibt.

$$\text{Zur Kontrolle: } f(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{11}{6}$$

- Nördlich der Geraden  $y = 2$  befindet sich ein Naturschutzgebiet. Der Abstand der neuen Umgehungsstraße zu diesem Gebiet soll den Abstand von 100m nicht unterschreiten. Untersuchen Sie, ob die durch die Funktion  $f$  beschriebene Straße diese Anforderung erfüllt.
- Bestimmen Sie den Punkt der Umgehungsstraße, in dem sich das Krümmungsverhalten der Straße ändert.
- Der nördliche Ortsrand von Raas ist näherungsweise parabelförmig und wird durch die Funktion  $g(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$  recht gut beschrieben. Die Fläche, die von der neuen

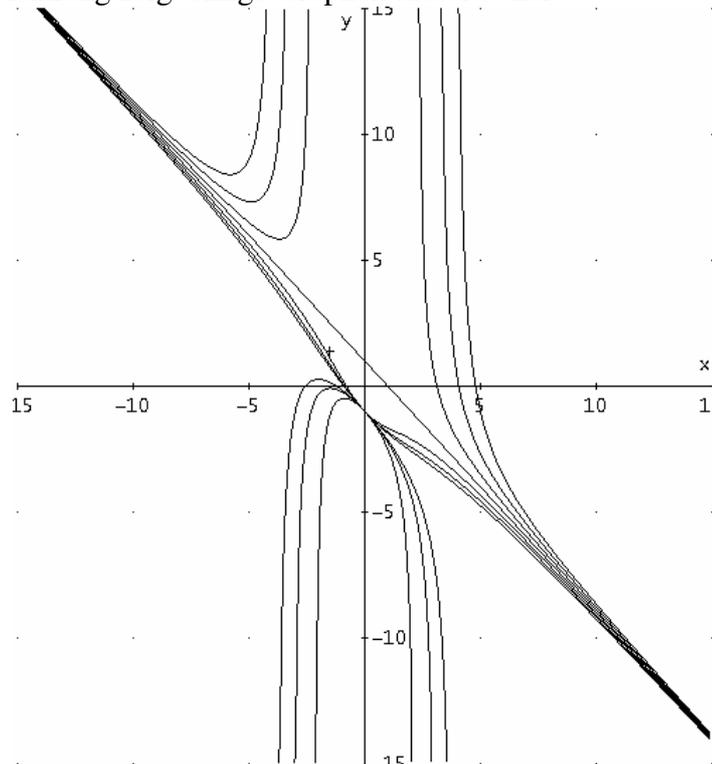
Umgehungsstraße, dem nördlichen Ortsrand und Teilen der Bundesstraße eingeschlossen wird, ist Eigentum der Gemeinde Raas und soll vollständig in ein Gewerbegebiet umgewandelt werden. Stellen Sie diese Fläche in der Graphik dar und bestimmen Sie die Höhe der Einnahmen, mit denen der Stadtkämmerer rechnen kann, wenn das Land vollständig zu einem Preis von 10 € pro  $\text{m}^2$  verkauft wird.

**Funktionenschar**

Durch 
$$f_k(x) = \frac{x^2 - k}{x^2 + k} - x \quad \text{mit } x \in \mathbb{R} \text{ und } k \in \mathbb{R}$$

ist eine Funktionenschar gegeben.

Die nachfolgende Zeichnung zeigt einige Graphen dieser Schar:



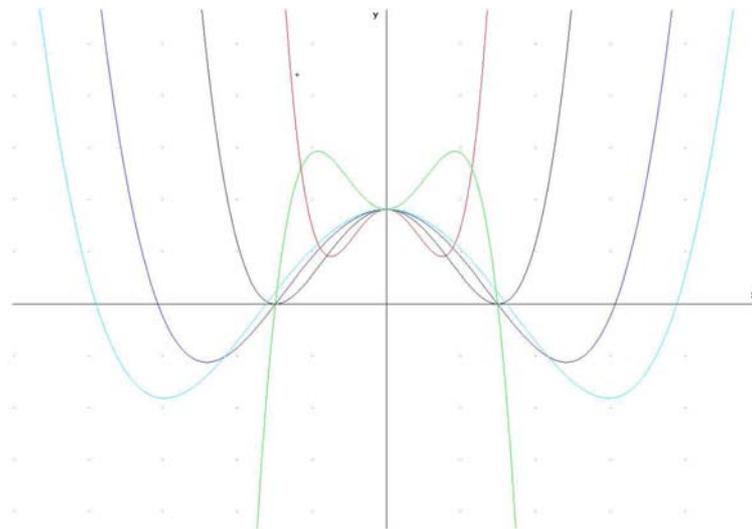
- Beschreiben Sie wesentliche Eigenschaften, Unterschiede und Gemeinsamkeiten der Graphen.
- Untersuchen Sie, welche Graphen sich im Punkt  $P(0/-1)$  schneiden.
- Zeigen Sie: Es gibt genau einen Graphen, der einen Sattelpunkt hat.
- Untersuchen Sie, für welche Parameter die Graphen Polstellen besitzen.
- Der Graph von  $f_k$  ( $k > 0$ ) schließt mit dem Graphen von  $f_0$  eine Fläche ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.
- $A_k$  sei der Flächeninhalt der Fläche, die der Graph von  $f_k$  ( $k > 0$ ) mit den Koordinatenachsen im dritten Quadranten einschließt.
  - Berechnen Sie (näherungsweise)  $A_{0,5}$ .
  - Begründen Sie, dass für die Flächen gilt:  $A_k \leq 0,5$ .

Aufg.-Nr.: 13	Bereich: ganzrat. Funktionenschar	Kursart: LK	WTR
---------------	-----------------------------------	-------------	-----

## Flächenstrategien

Gegeben sind die Funktionen  $f_a$  mit  $f_a(x) = \frac{1}{8a^3}(x^4 - 8a^2x^2) + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^{\neq 0}$ .

- a) Untersuchen Sie für  $a > 0$  den Graphen zu  $f_a$  auf Symmetrie sowie auf sein Verhalten für  $|x| \rightarrow \infty$ . Bestimmen Sie die Extrem- und Wendepunkte des Graphen in Abhängigkeit von  $a$ .
- b) 1. Bestimmen Sie denjenigen Wert von  $a$  hat, für den der zu  $f_a$  gehörende Graph einen Extrempunkt auf der  $x$ -Achse hat.  
 2. Beschreiben Sie den Verlauf der Graphen für negative Werte  $a$  und begründen Sie Ihre Aussage.  
 3. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von  $f_a$  in Abhängigkeit von  $a$ .  
 4. Ermitteln Sie alle Werte für  $a$ , so dass der Graph zu  $f_a$  durch den Punkt  $P(2 | 0)$  verläuft.  
 5. Alle Graphen in der Zeichnung unten gehören zur Schar  $f_a$ . Geben Sie jeweils das passende  $a$  an bzw. den Bereich, aus dem der zugehörige Wert von  $a$  stammt, und begründen Sie Ihre Zuordnung.



- c) Es soll die folgende Problemstellung bearbeitet werden: „Bestimmen Sie den Wert von  $a$  ( $a > 1$ ), für den der Inhalt der vom Graphen zu  $f_a$  und der  $x$ -Achse oberhalb der  $x$ -Achse eingeschlossenen Fläche gleich dem Inhalt der Flächen ist, die die  $x$ -Achse und der Graph unterhalb der  $x$ -Achse umschließen.“

Zur Lösung werden die Vorschläge V 1 und V 2 gemacht:

V 1: Ich bestimme die Nullstellen  $x_1, x_2, x_3, x_4$  mit  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$  und löse die Gleichung

$$\int_{x_2}^{x_3} f_a(x) dx = 2 \left| \int_{x_3}^{x_4} f_a(x) dx \right| .$$

V 2: Ich bestimme die Nullstellen  $x_1, x_2, x_3, x_4$  mit  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$  und löse die Gleichung

$$\int_0^{x_4} f_a(x) dx = 0$$

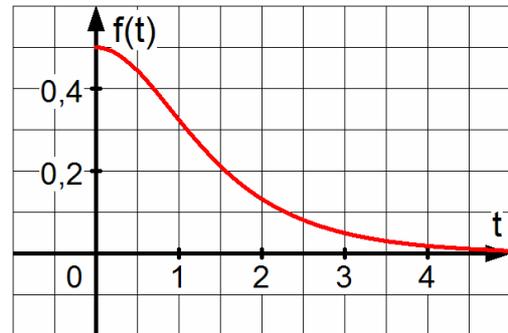
Beurteilen Sie diese beiden Vorschläge.

Aufg.-Nr.: 14	Bereich: e-Funktion	Kursart: LK	WTR
---------------	---------------------	-------------	-----

### Fischbestand

Eine Forschungsgruppe versucht, die Entwicklung eines Fischbestandes in einem See durch ein mathematisches Modell zu erfassen. Zu Beginn der Untersuchung leben im See 4 Millionen Fische. Die Änderungsrate des Bestandes wird in diesem Modell durch eine Funktion  $f$  mit

$$f(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2}; \quad t \geq 0$$



beschrieben ( $t$  in Jahren seit Untersuchungsbeginn,  $f(t)$  in Millionen pro Jahr). Obige Abbildung zeigt den Graphen von  $f$ .

- a) Untersuchen Sie  $f$  auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte.

$$(f'(t) = \frac{e^t(1-4e^t+e^{2t})}{(1+e^t)^4} \text{ kann ohne eigene Herleitung benutzt werden.})$$

- b) Untersuchen Sie das Verhalten von  $f$  für  $t \rightarrow \infty$ .

- c) (i) Weisen Sie nach, dass  $f$  für  $t > 0$  monoton abnimmt.  
(ii) Entscheiden Sie, ob dies bedeutet, dass der Fischbestand abnimmt.

- d) Leiten Sie durch Integration her, dass

$$F(t) = \frac{-1}{e^t + 1}$$

eine Stammfunktion von  $f$  ist.

- e) (i) Begründen Sie, warum der Bestand der Fische  $B(t)$  durch

$$B(t) = B(0) + \int_0^t f(x) dx$$

beschrieben wird.

- (ii) Ermitteln Sie, welcher Fischbestand nach 2 Jahren zu erwarten ist.  
(iii) Ermitteln Sie, welcher Fischbestand langfristig zu erwarten ist.

### Kommentar:

Die Aufgabe basiert größtenteils auf einer Aufgabe zur Abiturprüfung Mathematik 2005 (Baden-Württemberg), Wahlteil: Analysis I 3.

Aufg.-Nr.: 15	Bereich: ganzrat. Funktionenschar	Kursart: LK	WTR
---------------	-----------------------------------	-------------	-----

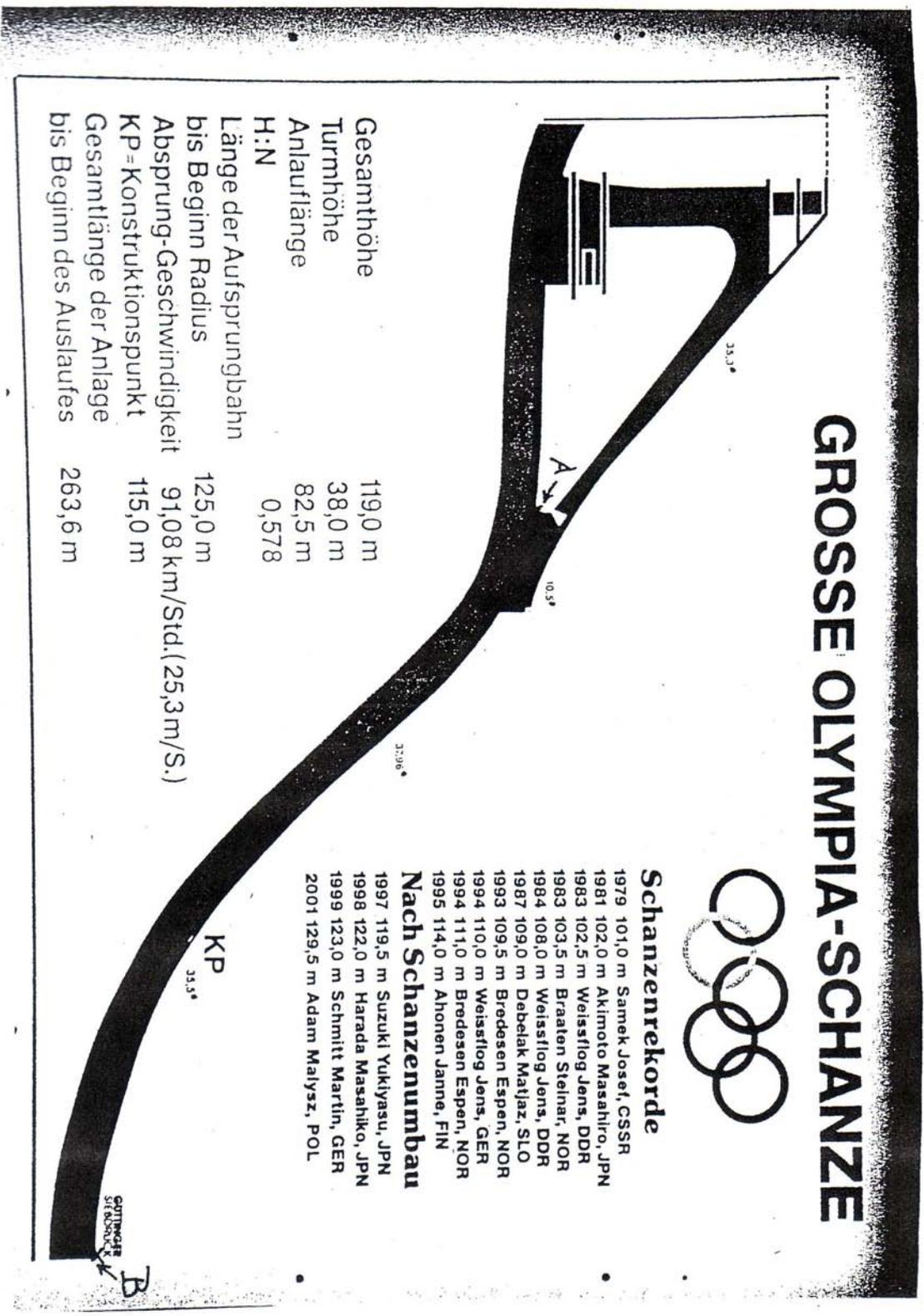
## Olympiaschanze

Die große Olympia-Schanze in Garmisch-Partenkirchen hat etwa das in der Abbildung erkennbare Profil. Für die markierten Punkte A und B gilt dabei: A liegt 81 m höher als B. Die waagerechte Entfernung zwischen den beiden Punkten beträgt rund 156m.

- Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion möglichst niedrigen Grades, die das Profil des Aufsprunghügels im Bereich von A bis B näherungsweise beschreibt.. Dabei liege A im Ursprung des Koordinatensystems. Die Steigung des Aufsprunghügels in den Punkten A und B werde modellhaft vereinfachend als null angenommen. Geben Sie die Koeffizienten mit voller Taschenrechner-Genauigkeit an. Auf die Kontrolle hinreichender Kriterien kann verzichtet werden.  
Vergleichen Sie das maximale Gefälle des Graphen der von Ihnen ermittelten Funktion (im relevanten Bereich) mit der Angabe in der Abbildung.
- Beweisen Sie: Bei ganzrationalen Funktionen der Form  $f(x)=ax^3+bx^2$  ( $a, b \neq 0$ ) liegt die Wendestelle genau in der Mitte zwischen den beiden Extremstellen.
- Nun soll das Aussehen des Aufsprunghügels variiert werden: Der Höhenunterschied zwischen den Punkten A und B soll weiterhin 81 m betragen. Die waagerechte Entfernung sei nun  $k$  Meter ( $k>0$ ). Die Profile der verschiedenen so entstehenden Aufsprunghügel sollen analog zu Aufgabenteil a) durch eine Funktionenschar ganzrationaler Funktionen beschrieben werden. Ermitteln Sie die Gleichung dieser Funktionenschar. (Zur Kontrolle:  $f_k(x) = \frac{162}{k^3}x^3 - \frac{243}{k^2}x^2$ )  
Bestimmen Sie die waagerechte Entfernung zwischen A und B so, dass ein maximales Gefälle von  $39^\circ$  entsteht?
- Wegen Schneemangels wird der Aufsprunghügel aus Aufgabenteil a) in einer Breite von 40 m mit einer Kunstschnedecke präpariert, die (gemessen parallel zur y-Achse) überall gleichmäßig dick ist. Im Bereich zwischen den Punkten A und B werden dazu  $1000 \text{ m}^3$  Kunstschnee aufgetragen. Berechnen Sie die Schneehöhe (gemessen parallel zur y-Achse).
- Die Länge des Aufsprunghügels zwischen den Punkten A und B kann nicht elementar berechnet werden, da es sich um eine gekrümmte Linie handelt. Leiten Sie analog zu den typischen Näherungsideen der Analysis ein Verfahren zur numerischen näherungsweise Berechnung dieser Länge her, indem Sie die wesentlichen Schritte dieses Verfahrens beschreiben.

ANHANG: Abbildung des Schanzenprofils

Anhang zu Aufgabe 1: Abbildung des Schanzenprofils der Olympia-Schanze in Garmisch-Partenkirchen



## Tennis

Die Abbildung stellt in einem dreidimensionalen Koordinatensystem schematisch das Spielfeld (Einzelfeld) eines Tennisplatzes dar. Das Feld wird in der Mitte durch ein Netz unterteilt, das von den Außenpfosten AB und EF gehalten wird. Die Netzoberkante ist in der Mitte im Punkt D niedriger als außen in den Punkten B und F, aber ansonsten geradlinig gespannt. Die angegebenen Maße des Platzes sind aus Vereinfachungsgründen auf ganze Meter gerundet. Auch die Koordinaten der unten angegebenen Punkte sind in Metern zu verstehen.

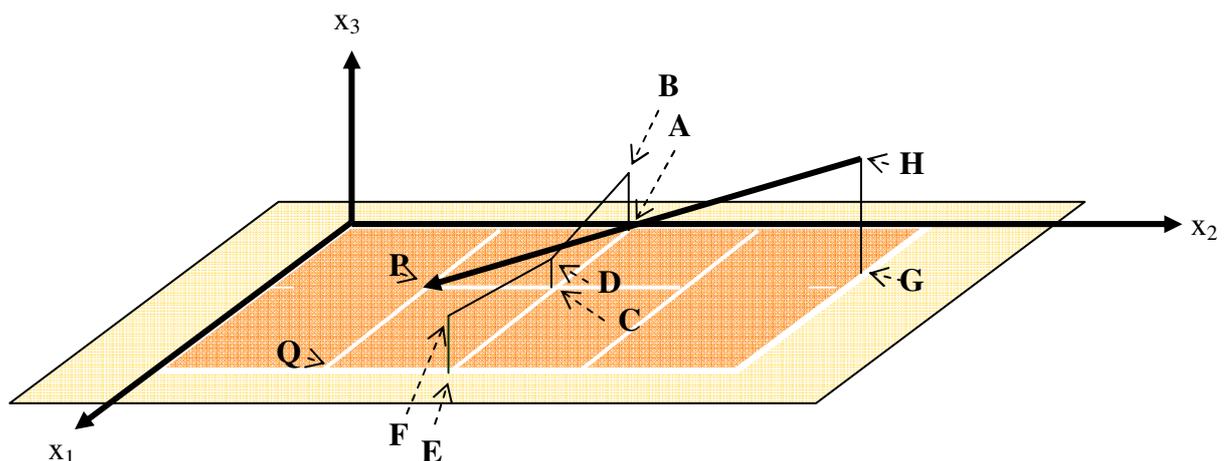


Die Bälle fliegen in unserem Modell geradlinig, wir vernachlässigen jegliche Spins oder andere Effekte wie auch Erdanziehung oder Luftreibung! Außerdem wird der Tennisball als Punkt aufgefasst.

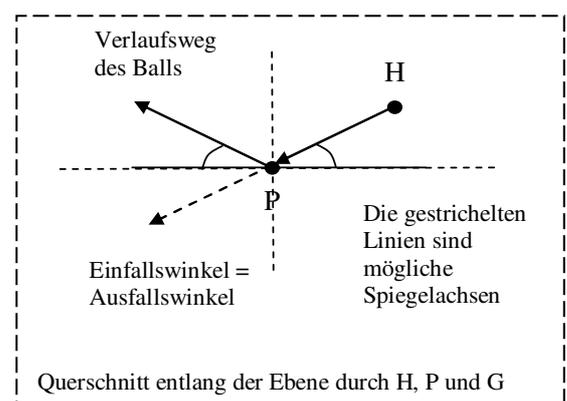
Die angegebenen Punkte des Tennisfeldes haben die folgenden Koordinaten:

A(0|12|0) B(0|12|1,1) C(4,5|12|0) D(4,5|12|0,9) E(9|12|0) F(9|12|1,1) P(4,5|6|0)  
Q(9|6|0).

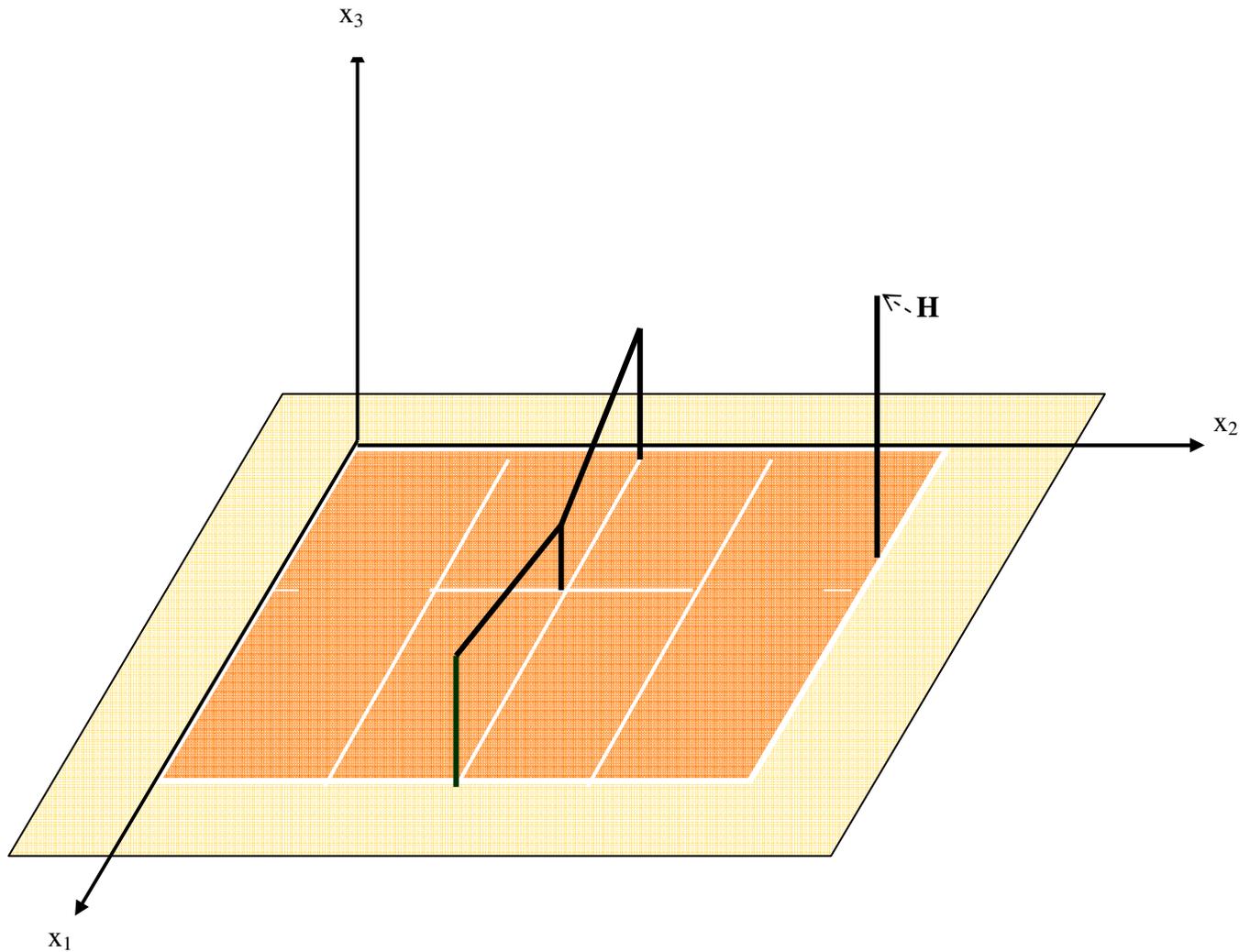
Im Punkt G(4|24|0) steht der Aufschläger, der versucht, den Tennisball vom Punkt H(4|24|3) seines Schlägers aus geradlinig in den Eckpunkt P des gegnerischen Aufschlagfeldes ECPQ zu schlagen.



- Geben Sie die Länge und die Breite des dunkel eingefärbten Tennisfeldes an.
- Berechnen Sie, wie viele Sekunden der Ball vom Verlassen des Schlägers im Punkt H bis zum Aufprall auf den Boden benötigt, wenn der Ball mit einer Geschwindigkeit von 180 km/h den Schläger verlässt und diese Geschwindigkeit auch bis zum Aufprall auf den Boden beibehalten wird.
- Ermitteln Sie, in welchem Winkel der Tennisball im Punkt P auf dem Boden auftrifft.
- Dem Aufschläger gelingt es, seinen Aufschlag genau in dem Punkt P zu platzieren. Von dort aus springt der Ball idealtypisch, wie in der Abbildung rechts dargestellt, ab in Richtung des Gegners, der auf der Grundlinie (der  $x_1$ -Achse) steht. I  
Bestimmen Sie denjenigen Punkt S der  $x_1x_3$ -Ebene, in dem der Schläger des Gegners den Ball zum Rückschlag (Return) trifft.



- e) Gültig ist ein Aufschlag genau dann, wenn er innerhalb des Aufschlagfeldes ECPQ landet (einschließlich der Berandungslinie). Beschreiben Sie einen Lösungsweg zur Berechnung der Eckpunkte derjenigen Teilfläche des Aufschlagfeldes, in dem der vom Punkt H aus geradlinig fliegende Ball landen kann. Geben Sie die geometrische Form dieser Teilfläche an. Zeichnen Sie diese Fläche in die Vorlage einschließlich der Konstruktionslinien und der zugehörigen Bezeichnungen ein.

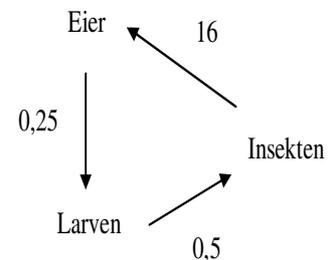


### Insektenpopulation

Modellhaft lässt sich die Entwicklung einer bestimmten Insektenpopulation folgendermaßen beschreiben:

Aus Eiern dieser Insektenart entwickeln sich zunächst innerhalb eines Monats Larven, die innerhalb eines Monats zu Insekten werden. Die Insekten legen wiederum nach einem Monat Eier und sterben anschließend.

Aus Beobachtungen von Biologen weiß man, dass aus 25% der Eier, die ein Insekt legt, Larven werden (die anderen 75% werden gefressen oder verenden) und dass sich die Hälfte der Larven zu vollständigen Insekten entwickelt (die andere Hälfte stirbt oder wird gefressen). Außerdem legt ein Insekt durchschnittlich 16 Eier.



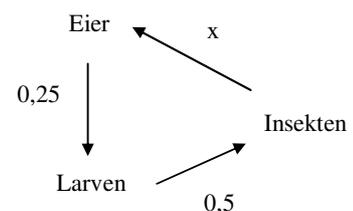
a) Zu einem bestimmten Zeitpunkt werden 40 Eier, 20 Larven und 12 Insekten gezählt. Untersuchen Sie, wie sich die Anzahlen der Eier, Larven und Insekten im Laufe von 6 Monaten entwickelt. Schreiben Sie dazu die erste Rechnung in der Matrixschreibweise auf und füllen Sie die nebenstehende Tabelle aus.

Beginn des	Eier	Larven	Insekten
1. Monats	40	20	12
2. Monats			
3. Monats			
4. Monats			
5. Monats			
6. Monats			
7. Monats			

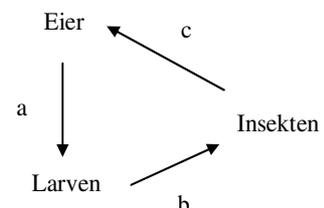
b) Die Populationen entwickeln sich in Form eines 3-monatigen Zyklus. Begründen Sie diese Aussage anhand Ihrer Tabelle. Berechnen Sie dann jeweils die Anzahlen der Eier, Larven bzw. Insekten nach einem Jahr und nach zwei Jahren.

c) Zur Bekämpfung der Populationen steht ein Insektizid zur Verfügung, das die Fortpflanzung der Insekten so beeinflusst, dass ein Insekt nur noch eine kleinere Zahl von Eiern ablegt.

Bestimmen Sie die Anzahl an Eiern, die ein Insekt ablegen darf, wenn die Insektenpopulation langfristig stabil sein soll.



*Tipp: Betrachten Sie die Entwicklung der Insektenpopulation unter der Bedingung, dass ein Insekt x Eier ablegt.*



d) Die Insektenpopulation soll langfristig stabil bleiben. Leiten Sie einen Zusammenhang zwischen den Parametern a, b und c her, der diese langfristige Stabilität sichert.

e) Bilden Sie die dritte Potenz der in der Teilaufgabe (a) aufgestellten Übergangsmatrix. Begründen Sie damit die im Aufgabenteil (b) beschriebene zyklische Populationsentwicklung.

Aufg.-Nr.: 18	Bereich: vektorielle Geometrie	Kursart: GK	WTR
---------------	--------------------------------	-------------	-----

Gegeben sind die Gerade  $g$  durch den Punkt  $P(2 \mid 1 \mid -1)$  und den

Richtungsvektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  und die Gerade  $h_t$  durch den Punkt  $Q(9 \mid 12 \mid -2)$

und den Richtungsvektor  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

- Bestimmen Sie  $t$  so, dass sich die beiden Geraden schneiden, und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes  $S$ .  
(Ergebnis:  $t = -1$ ;  $S(6 \mid 9 \mid 7)$ ).
- Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte auf der Geraden  $g$ , die von  $Q$  die Entfernung  $3\sqrt{11}$  haben. Erstellen Sie dazu eine Skizze an.  
(Ergebnis:  $A(6 \mid 9 \mid 7) = S$ ,  $B(4 \mid 5 \mid 3)$ )
- $Q'$  sei der Spiegelpunkt von  $Q$  bzgl. der Geraden  $g$ . Tragen Sie  $Q'$  in Ihre Skizze aus Teilaufgabe b) ein und berechnen Sie die Koordinaten von  $Q'$ .
- Geben Sie eine Koordinatengleichung der durch die Geraden  $g$  und  $h_{t=-1}$  gebildeten Ebene  $E$  an.  
(mögliches Ergebnis:  $8x - 5y + z = 10$ )
  - Zeigen Sie, dass die Ebene  $F$  mit  $F: x + 2y + 2z = 29$  senkrecht auf der Ebene  $E$  steht.

Aufg.-Nr.: 19	Bereich: Abbildungsmatrizen	Kursart: LK	CAS
---------------	-----------------------------	-------------	-----

Gegeben sind die Abbildungsmatrix  $M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ , die Vektoren  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  sowie die Punkte  $A(0/0)$ ,  $B(6/0)$ ,  $C(6/6)$ ,  $D(0/6)$ .

1)

- a) Bestimmen Sie die Menge aller Fixpunkte von  $M$  und bestätige, dass es sich bei dieser Punktmenge um eine Ursprungsgerade  $g$  handelt.

**(zur Kontrolle und zum Weiterrechnen:  $g : \vec{x} = r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = r\vec{u}$  )**

b)

- i) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix  $M$ .  
 ii) Zeigen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse :

Ist  $\vec{p} = r\vec{u} + s\vec{v}$ , so gilt für den Bildvektor  $\vec{p}'$ :  $\vec{p}' = M \circ \vec{p} = r\vec{u} + \frac{1}{2}s\vec{v}$ .

c)

- i) Zeichnen Sie in dasselbe Koordinatensystem (1 Einheit = 1cm) das Quadrat  $ABCD$ , das Bild  $A'B'C'D'$  dieses Quadrates (bzgl.  $M$ ) und das Bild  $A''B''C''D''$  dieses Bildes.  
 ii) Erklären Sie mit Hilfe der in b) ii) angegebenen Eigenschaft:
- Ist  $P(x/y)$  ein beliebiger Punkt, so liegen die Punkte  $P, P', P''$  auf einer Geraden. (Dabei ist  $P'$  der Bildpunkt von  $P$  und  $P''$  der Bildpunkt von  $P'$ .)
  - Parallele Vektoren werden auf parallele Vektoren abgebildet (also  $\vec{w} \parallel \vec{z} \Rightarrow \vec{w}' \parallel \vec{z}'$ ).

d)

- i) Bestimmen Sie  $M^2, M^3, M^4$  und erläutern Sie, weshalb  $M^\infty = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$  die „Grenzmatrix“  $M^n$  für  $n \rightarrow \infty$  sein könnte.

2) Berechnen Sie für  $\vec{p} = r\vec{u} + s\vec{v}$  den Bildvektor  $M^\infty \cdot \vec{p}$ .

- a) Erklären Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus den bisherigen Teilaufgaben:  
 Welche geometrische Abbildung wird durch die Abbildungsmatrix  $M^\infty$  festgelegt?

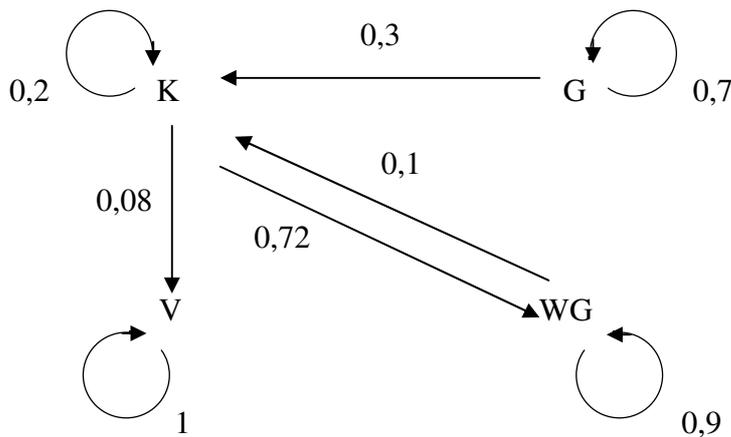
Aufg.-Nr.: 20	Bereich: Übergangsmatrizen	Kursart: LK	CAS
---------------	----------------------------	-------------	-----

### Krankheit

In dieser Aufgabe soll der Verlauf einer Krankheit in einer Population untersucht werden.

Die Behandlung der Krankheit ist nicht immer erfolgreich: 8% der Erkrankten sterben an ihr. Die wieder Genesenen haben aufgrund erhöhter Abwehrkräfte eine geringere Wahrscheinlichkeit erneut zu erkranken als diejenigen, die noch nicht erkrankt waren.

Das nachfolgende Diagramm gibt die vollständige Beschreibung der Übergänge für eine Zeiteinheit von einer Woche wieder.

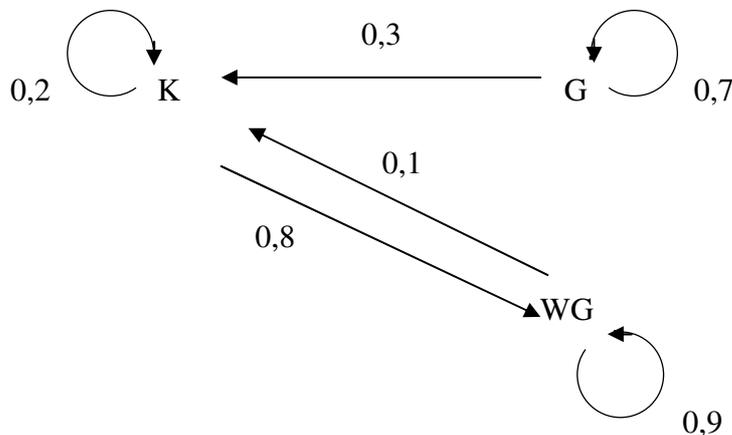


- a) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix A.
- b)
  - b1) Berechnen Sie die Übergangsmatrix für einen Zeitraum von 5 Wochen.
  - b2) Geben Sie an, wie viel Prozent der anfangs Gesunden auch noch nach 5 Wochen gesund sind.
  - b3) Nennen Sie den Prozentsatz derjenigen, die anfangs gesund waren und innerhalb dieser 5 Wochen gestorben sind.
- c) In einer Siedlung von 1500 Personen bricht die Krankheit aus.
  - c1) Beschreiben Sie die Situation in dieser Siedlung nach 3 Wochen.
  - c2) Untersuchen Sie, welche langfristige Entwicklung bei gleich bleibenden Übergangswahrscheinlichkeiten in dieser Siedlung zu erwarten ist.

bitte wenden!

Aufg.-Nr.: 20	Bereich: Übergangsmatrizen	Kursart: LK	CAS
---------------	----------------------------	-------------	-----

d) Im folgenden soll davon ausgegangen werden, dass sich die medizinischen Behandlungsmethoden soweit verbessert haben, dass niemand mehr an dieser Krankheit stirbt und dass 80% der Erkrankten innerhalb einer Woche wieder gesund werden:



d1) Geben Sie eine vereinfachte 3x3-Übergangsmatrix B an.

d2) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix B.

Erneut bricht in einer Population von 1500 Personen die Krankheit aus.

d3) Beschreiben Sie explizit den Verlauf des Krankenstandes durch eine (auf  $\mathbb{R}^+$  erweiterte) Funktion.

(zur Kontrolle:  $f(x) = 500 \cdot 0,7^x - 666 \frac{2}{3} \cdot 0,1^x + 166 \frac{2}{3}$ )

Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion und berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Krankenstand am stärksten abnimmt.

d4) Untersuchen Sie die langfristige Entwicklung des Krankenstandes.

Aufg.-Nr.: 21	Bereich: vektorielle Geometrie	Kursart: LK	WTR
---------------	--------------------------------	-------------	-----

## Flugbahnen



Bei der Flugsicherung des Sportflughafens herrscht Alarmzustand:

Bert Bruch hat sich soweit von den Folgen seiner letzten Landung erholt, dass er wieder in einem Flugzeug sitzen kann. Er befindet sich derzeit im Anflug auf die Landebahn mit den Eckpunkten

$$A(80 \mid 400 \mid 2), B(100 \mid 400 \mid 2), C(80 \mid 1200 \mid 6) \text{ und } D(100 \mid 1200 \mid 6) \\ (1 \text{ Einheit} \hat{=} 1 \text{ m})$$

Berts Flugbahn zur Landung verläuft entlang einer Geraden. Er befindet sich zum Zeitpunkt  $t$  (in s) im Punkt  $X(t)$  mit

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 100 \\ -2550 \\ 228,75 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0,1 \\ 22 \\ -1,5 \end{pmatrix}.$$

- Zeigen Sie, dass die vier Eckpunkte der Landebahn in einer Ebene liegen und ein Rechteck bilden.
- Bestimmen Sie den Abstand der Flugbahn von der (näherungsweise als punktförmig betrachteten) Flugsicherung in  $F(0 \mid 0 \mid 8)$ .
- Damit Bert nicht schon wieder eine Bruchlandung macht, muss er natürlich im Bereich der Landebahn aufsetzen. Seine oben angegebene Flugbahn darf beim Aufsetzen nicht um mehr als  $6^\circ$  gegen die Landebahn geneigt sein. Prüfen Sie, ob Bert beiden Bedingungen gerecht wird und es diesmal schafft.
- Auch ein zweites Flugzeug im Bereich des Sportflughafens bewegt sich entlang einer Geraden. Es befindet sich zum Zeitpunkt  $t$  im Punkt  $Y(t)$  mit

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 53 \\ -410 \\ 43,75 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -30 \\ 4 \end{pmatrix}.$$



Weisen Sie nach, dass die Flugbahn von Bert Bruchs Flugzeug die Flugbahn dieses Flugzeuges schneidet.

Begründen Sie, dass es trotzdem nicht zu einem Zusammenstoß beider Flugzeuge kommt.

- Berechnen Sie, wo sich die beiden Flugzeuge zum Zeitpunkt  $t = 50$  befinden. Berechnen Sie außerdem den Abstand der beiden Flugzeuge zu diesem Zeitpunkt.
- Bestimmen Sie den Abstand  $d(t)$  der beiden Flugzeuge zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$ . Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt die beiden Flugzeuge ihren kleinsten Abstand haben.

Aufg.-Nr.: 22	Bereich: Übergangsmatrizen	Kursart: LK	WTR
---------------	----------------------------	-------------	-----

## Ödnis im Osten

**Bis zu 50 Prozent seiner heutigen Bevölkerung wird Deutschlands Osten langfristig einbüßen. Diese Prognose wagen Forscher des Leibniz-Instituts für Länderkunde in Leipzig. Nun fordern sie Mut zum gekonnten Schrumpfen. (Stern, November 2004)**

Zu Beginn des Jahres 2004 lebten 69,5 Mio Menschen in den westdeutschen Bundesländern (einschließlich Berlin). In den fünf neuen Bundesländern lebten 13,5 Mio Menschen. Im Laufe des Jahres siedelten 1,2% der Bevölkerung aus den neuen in die alten Bundesländer um. In die umgekehrte Richtung waren es hingegen nur 0,1%.

- a) Gib einen Übergangsgraphen (Gozintho-Graphen) und eine Übergangsmatrix an, die den obigen „Austauschprozess“ zwischen den alten Bundesländern (A) und den neuen Bundesländern (N) beschreiben.
- b) Es soll nun im Weiteren versucht werden, mit Hilfe der Übergangsmatrix aus Aufgabenteil a) Prognosen über die nähere oder fernere Entwicklung der Bevölkerungsverteilung in Deutschland zu erstellen. Nenne Schwachpunkte dieses Prognosemodells und gib an, welche Annahmen man für alle folgenden Überlegungen zu Grunde legen müsste.
- c) Berechne die prognostizierten Bevölkerungszahlen in A und N für die Jahre 2005 und 2006.
- d) Berechne für die Übergangsmatrix  $M$  die Potenzen  $M^2$  und  $M^3$ . Interpretiere die Koeffizienten von  $M^2$  im Problemkontext und nutze dein Ergebnis zur Kontrolle von Aufgabenteil c).
- e) Ermittle in deinem groben Prognosemodell eine stabile Grenzverteilung der Einwohnerzahlen und vergleiche dein Ergebnis mit der einleitenden Stern-Meldung.
- f) Berechne einen Wert für die Abwanderungsquote aus den neuen Bundesländern, der erreicht werden müsste, damit bei gleichbleibender Zuwanderungsquote aus den alten Bundesländern langfristig eine Bevölkerungszahl von 10 Mio nicht unterschritten wird.

Aufg.-Nr.: 23	Bereich: Übergangsmatrizen	Kursart: LK	WTR
---------------	----------------------------	-------------	-----

## Bevölkerungsentwicklung

Eine Stadt hatte im Jahr 1990 die Einwohnerzahl von 100.000 Bürgern, welche in den folgenden Jahren stagnierte.

Im Jahr 1990 lebten 80.000 Einwohner in der City (C) und 20.000 in den Vororten (V). Für 1995 und 2000 sind folgende Daten bekannt:

Jahr	Einwohner in der City (C)	Einwohner in den Vororten (V)
1995	76.000	24.000
2000	73.200	26.800

Die Erhebungen wurden immer zu Jahresbeginn durchgeführt.

- Bestimmen Sie die stochastische Übergangsmatrix  $A$  für die Bevölkerungsentwicklung innerhalb der Stadt. Dabei beträgt der Zeitraum für einen Übergang wie im Eingangstext fünf Jahre. Gehen Sie von gleich bleibenden prozentualen Umzugstrends aus. Zeichnen Sie ein Diagramm, das die Bevölkerungsbewegungen veranschaulicht und berechnen Sie mit Hilfe von  $A$  die City-Vorort-Verteilung für den Beginn der Jahre 2005 und 2010.

Bestimmen Sie ebenfalls die Verteilung für den Beginn von 1985.

Zur Kontrolle:  $A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$ .

- Bestimmen Sie die stationäre Verteilung der Einwohner in der City und den Vororten.

- Sei nun  $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$  mit  $0 < p < 1$  und  $0 < q < 1$  eine beliebige stochastische Matrix. Ermitteln Sie für  $A$  denjenigen Fixvektor, dessen Koordinaten die Summe 1 haben.

- Weisen Sie für die Matrix  $A$  aus Teilaufgabe 3 nach: Der Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und das Produkt von  $A \cdot \vec{v}$  sind Vielfache voneinander.

Aufg.-Nr.: 24	Bereich: vektorielle Geometrie	Kursart: LK	WTR
---------------	--------------------------------	-------------	-----

## Dreieckspyramide

Gegeben sind die Punkte

$A(-6; 8; 7)$ ,  $B(-3; -4; 4)$ ,  $C(1; -8; 6)$  und  $D(9; -4; -2)$ .

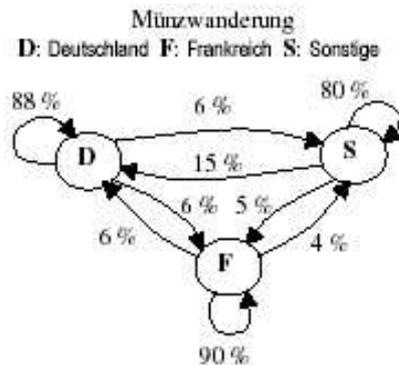
- Ermitteln Sie die Koordinatenform der Ebene  $E$ , die durch die drei Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  gegeben ist. ( mögliches Ergebnis:  $2x + y - 2z = -18$  )
- Geben Sie die Schnittpunkte  $S_x$ ,  $S_y$  und  $S_z$  der Ebene  $E$  mit den Koordinatenachsen an und zeichnen Sie das Dreieck  $S_x S_y S_z$  in ein Koordinatensystem ein.  
(  $1 \text{ LE} \cong 0,5 \text{ cm}$ , Verkürzungsfaktor in  $x$ -Richtung  $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$  )
- Zeigen Sie, dass der Punkt  $D$  außerhalb der Ebene  $E$  liegt und berechnen Sie den Abstand des Punktes  $D$  von der Ebene  $E$ .
- Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes  $D'$ , den man durch Spiegelung des Punktes  $D$  an der Ebene  $E$  erhält.
- Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$  sowie das Volumen der Dreieckspyramide, die das Dreieck  $ABC$  gemeinsam mit dem Punkt  $D$  bildet.
- Durch  $h_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1+2k \\ 2-2k \\ 2+k \end{pmatrix}$  ( $t, k \in \mathbb{R}$ ) ist eine Geradenschar mit dem gemeinsamen Punkt  $A$  gegeben. Zeigen Sie, dass alle Geraden der Schar in der Ebene  $E$  liegen.
- Entscheiden Sie, ob die Gerade  $AC$  eine Gerade der obigen Geradenschar  $h_k$  ist.
- Berechnen Sie den Schnittwinkel, den die Gerade  $AC$  mit der Geraden  $h_5$  einschließt.

Aufg.-Nr.: 25	Bereich: Übergangsmatrizen	Kursart: LK	WTR
---------------	----------------------------	-------------	-----

## Münzwanderung

Zum 1. 1. 2002 wurden in allen beteiligten EU-Ländern Euro-Münzen in Umlauf gebracht.

In jedem Land wurden ausschließlich Münzen eigener Prägung eingesetzt. Für die dann einsetzende „Münzenwanderung pro Jahr“ zwischen den Gebieten **D**eutschland, **F**rankreich und **S**onstige Länder sollten sich die jährlichen Wanderungsanteile gemäß untenstehendem Übergangsgraphen verhalten.



- Erstellen Sie für diesen Vorgang die Übergangsmatrix  $A$ , und beschreiben Sie die Übergänge in Worten.
- Ermitteln Sie unter den genannten Hypothesen die prozentuale Verteilung der „deutschen“ Münzen auf die drei Gebiete ( D, F, S ) zum 1. 1. 2003, zum 1.1.2004 und zum 1.1.2006, und geben Sie die Übergangsmatrix für 2 Jahre an.

Ihre Startverteilung beschreibt der Vektor  $\vec{D}_{02}$  mit  $\vec{D}_{02} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zum 1.1.02 befinden sich also 100% der deutschen Münzen in Deutschland.

- Untersuchen Sie, ob es eine stationäre Verteilung der Münzen auf die drei Gebiete gibt, und geben Sie diese ggfs. an.
- Zum 1.1.2002 wurden in Deutschland 800 Mio, in Frankreich 600 Mio und in den sonstigen Ländern 150 Mio Münzen ausgegeben. Ermitteln Sie die Gesamtanzahl aller Münzen jeweils in den drei Gebieten zum 1.1.2003, und erklären Sie, inwieweit man bei dieser Problemstellung die Matrixmultiplikation einsetzen kann.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass am 1.1.2004
  - eine deutsche Euromünze Deutschland nie verlassen hat.
  - eine im Ausland gewesene „deutsche“ Münze wieder in Deutschland ist.
  - eine von Ihnen in Deutschland gefundene „deutsche“ Münze in Frankreich war.

Aufg.-Nr.: 26	Bereich: Stochastik – ohne Testverfahren	Kursart: GK	CAS
---------------	--	-------------	-----

## Straßenbahn

Nach Angaben der Initiative „Pro-Bahn-Mitteldeutschland“ beträgt der Anteil der Schwarzfahrer im Nahverkehr 3 - 4 %. Informationen der Magdeburger Verkehrsbetriebe zufolge wurden im vergangenen Jahr ca. 62 Millionen Personen befördert, die Anzahl der erappten Schwarzfahrer betrug – so konnte man in der Tageszeitung „Volksstimme“ lesen – 32000.

(a) Vergleichen Sie diese Zahlenwerte miteinander und kommentieren Sie das Ergebnis.

(b)



Zwei Kontrolleure steigen an der Haltestelle „Nicolaipplatz“ in eine Bahn der Linie 10 in Richtung Zentrum und kontrollieren alle 42 Fahrgäste. An der Haltestelle „Alter Markt“ steigen sie in eine Bahn der Linie 6 Richtung Diesdorf um, in der sie weitere 56 Fahrgäste überprüfen.

(Quelle: [www.mvbnet.de](http://www.mvbnet.de))

1. Berechnen Sie ausgehend von einem Schwarzfahreranteil von ca. 4% am gesamten Fahrgastaufkommen die Wahrscheinlichkeit, dass die Kontrolleure bei diesen beiden Kontrollen mindestens 2 Schwarzfahrer erappten.
2. Untersuchen Sie, mit wie vielen Schwarzfahrern bei diesen beiden Kontrollen zu rechnen ist.
3. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 42 Fahrgästen der Linie 10 kein Schwarzfahrer ist.
4. Ermitteln Sie rechnerisch, wie viele Personen überprüft werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens einen Schwarzfahrer zu erwischen.

(c) Die Anzahl der Schwarzfahrer hält sich nur in Grenzen, wenn jeder Fahrgast mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit  $p$  kontrolliert wird. Ist dieser Wert  $p$  zu klein, wird die Anzahl der Schwarzfahrer dramatisch ansteigen, ist der Wert zu hoch, gehen z. B. Einnahmen durch das „erhöhte Beförderungsentgelt“ in Höhe von 40 € verloren.

Im Folgenden betrachten wir einen Fahrgast, der ca. 52 Fahrten im Monat unternimmt und gehen dabei von folgenden Annahmen aus:

- Der durchschnittliche Fahrpreis beträgt pro Fahrgast und Fahrt 1,20 €.
- Der Schwarzfahreranteil am gesamten Fahrgastaufkommen beträgt ca. 4%.
- Ein Schwarzfahrer wird ehrlich, wenn er bei seinen 52 Fahrten mindestens zweimal kontrolliert wird.
- Ein ehrlicher Fahrgast wird zum Schwarzfahrer, wenn er bei seinen 52 Fahrten überhaupt nicht kontrolliert wird.

1. Begründen Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Schwarzfahrer ehrlich wird, durch den Term  $1 - (1-p)^{52} - 52p(1-p)^{51}$  beschreiben lässt.

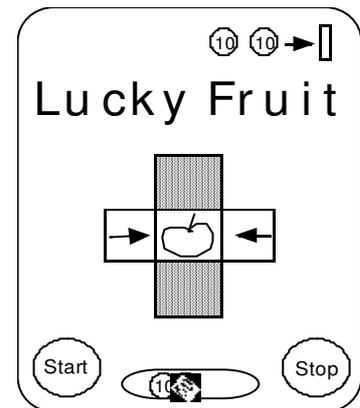
Aufg.-Nr.: 26	Bereich: Stochastik – ohne Testverfahren	Kursart: GK	CAS
---------------	--	-------------	-----

2. Begründen Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein ehrlicher Fahrgast zum Schwarzfahrer wird, durch den Term  $(1-p)^{52}$  beschreiben lässt.
3. Ermitteln Sie mit Hilfe eines zweistufigen Baumdiagramms einen Funktionsterm  $P_1$  in Abhängigkeit von  $p$  für die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Fahrgast am Ende des Monats Schwarzfahrer ist.  
[zur Kontrolle:  $P_1 = (1-p)^{52} + 2,08p(1-p)^{51}$  ]
4. Bestimmen Sie einen Funktionsterm  $P_2$  für die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Fahrgast am Ende des Monats ehrlicher Zahler ist.
5. Stellen Sie die beiden Funktionsterme mit dem CAS grafisch dar und beschreiben Sie jeweils den Verlauf des Grafen.
6. Ermitteln Sie, für welches  $p$  die Einnahmen pro Fahrgast maximal werden.
7. Untersuchen Sie, wie sich eine Verdoppelung des „erhöhten Beförderungsentgelts“ auswirkt.

Aufg.-Nr.: 27	Bereich: Stochastik – mit Testverfahren	Kursart: GK	WTR
---------------	---	-------------	-----

### Spielautomat Lucky Fruit

Der elektronisch gesteuerte Geldspielautomat „Lucky Fruit“ funktioniert so, dass er auf einem Bildschirm eine der drei Früchte „Apfel“, „Birne“ oder „Zitrone“ anzeigt. Die Anzeigewahrscheinlichkeit für „Apfel“ beträgt 10%, für „Birne“ 30% und für „Zitrone“ 60%.



- (a) Beim Sonderspiel „Double Play“ werden für den Einsatz von 20 Cent nacheinander zwei Spiele gestartet. Ein Gewinn stellt sich dann ein, wenn zweimal die gleiche Frucht angezeigt wird. Zeichnen Sie ein passendes Baumdiagramm.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass sich kein Gewinn einstellt.
  - Ermitteln Sie, wie viele Sonderspiele mindestens gespielt werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass „Apfel-Apfel“ gar nicht eintrifft, kleiner ist als 10%.
- (b) Im Falle von „Apfel-Apfel“ spielt der Automat 75 Cent aus, bei „Birne-Birne“ 50 Cent und bei „Zitrone-Zitrone“ 25 Cent. In allen anderen Spielausfällen gibt es keine Auszahlung.
- Berechnen Sie den bei einem Sonderspiel zu erwartenden Auszahlungsbetrag.
  - Die Einzelwahrscheinlichkeiten lassen sich elektronisch verstellen. Das Gerät soll nun so eingestellt werden, dass die Ereignisse „Birne“ und „Zitrone“ gleichwahrscheinlich sind. Ermitteln Sie, wie die Wahrscheinlichkeit  $p$  für „Apfel“ gewählt werden muss, damit der zu erwartende Gewinn minimal wird.
- (c) Die Steuerelektronik enthält für Kontrollzwecke einen Speicher, in dem die Ergebnisse der letzten 50 Einzelspiele gespeichert sind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass während dieser 50 Spiele „Apfel“ und „Zitrone“ zusammengenommen seltener eintrifft als „Birne“.
- (Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass die anfangs genannten Einzelwahrscheinlichkeiten nicht verstellt worden sind.)
- (d) Aufgrund gesetzlicher Vorgaben darf das Ordnungsamt einen der beschriebenen Spielautomaten nicht zulassen, wenn die Wahrscheinlichkeit für  $p$  für das Ereignis „Apfel“ weniger als 0,1 beträgt. Durch den Einsatz fehlerhafter Bauteile ergab es sich aber, dass die Voreinstellung bei einigen Geräten leider doch zu einer Wahrscheinlichkeit  $p$  führte, die unter 0,1 lag. Da die Nichtzulassung dieser Geräte drohte, wurde die Geräteserie repariert und anschließend in 100 Probespielen überprüft, mit welcher Wahrscheinlichkeit „Apfel“ angezeigt wird.
- Geben Sie die Null- und die Gegenhypothese an. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel für einen Test, bei dem die Nullhypothese auf einem Signifikanzniveau von 2% überprüft wird und erklären Sie die Bedeutung der möglichen Fehlentscheidungen bei diesem Test. Begründen Sie Ihre Wahl der Nullhypothese.

Aufg.-Nr.: 28	Bereich: Stochastik – mit Testverfahren	Kursart: GK	WTR
---------------	---	-------------	-----

## Rußfilter

Eine Fabrik  $F_1$  stellt Rußfilter für Dieselmotoren her mit einem Ausschussanteil von 25% .

- a) Berechnen Sie Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Stichprobe vom Umfang  $n = 50$  - genau 15 defekte Rußfilter
- mehr als 12 defekte Rußfilter
  - weniger als 12 defekte Rußfilter sind.
- b) Die Fabriken  $F_2$  und  $F_3$  stellen ebenfalls Rußfilter her, und zwar mit einem Ausschussanteil von 20% bei Fabrik  $F_2$  und 30% bei Fabrik  $F_3$  . Ein Autohersteller bezieht 50% seiner Rußfilter von Fabrik  $F_1$  , 35% seiner Rußfilter von Fabrik  $F_2$  und 15% seiner Rußfilter von Fabrik  $F_3$  .
- Ein Rußfilter wird zufällig aus dem Lager des Autoherstellers entnommen und überprüft. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er Ausschuss ist?
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit mit der ein Rußfilter, der Ausschuss ist, von Fabrik  $F_2$  bezogen wurde.
- c) In Fabrik  $F_1$  wird ein neues Herstellungsverfahren eingeführt, welches den Ausschussanteil auf 20 % senken soll.
- Um zu überprüfen, ob der Ausschussanteil tatsächlich gesenkt wurde (Nullhypothese:  $H_0 : p = 0,25$  ), wird der Produktion eine Stichprobe vom Umfang  $n = 100$  entnommen. Bestimmen Sie auf dem Signifikanzniveau  $\alpha = 0,05$  eine Entscheidungsregel.
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nullhypothese nicht verworfen wird, obwohl der Ausschussanteil tatsächlich auf 20% gesenkt wurde.

Aufg.-Nr.: 29	Bereich: Stochastik – ohne Testverfahren	Kursart: LK	CAS
---------------	--	-------------	-----

## Telefonvertrag

Bei Abschluss eines Telefonvertrages bieten die Telefongesellschaften gegen eine entsprechende Gebühr auch eine detaillierte monatliche Telefonabrechnung an, im Folgenden *Tele-Info-Paket* (TIP) genannt.

**Beachte zur Lösung der Teilaufgaben a), b), c), d) die beigefügten TIP-Informationen.**

- a) Stelle die in **Tabelle 2** festgehaltenen *Kostenanteile* für *Art* (1. Stufe) und *Zeit* (2. Stufe) der Gespräche in einer Mehrfeldertafel dar. Berechne die fehlenden Kostenanteile.
- b) Bestimme den Anteil der Kosten netzinterner Gespräche an den zur Hauptzeit anfallenden Kosten.
- c) Entscheide, ob die folgende Aussage zutrifft und begründe deine Entscheidung.  
*Der Kunde hat außerhalb der Wochenendzeit länger ins nationale Festnetz als netzintern telefoniert.*
- d) Der Kunde hat im Abrechnungszeitraum insgesamt ca. 95,7 Minuten telefoniert. Ermittle, wie viele Minuten er am Wochenende zwischen 6 und 18 Uhr telefoniert hat.
- e) Das TIP führt alle im Abrechnungszeitraum angewählten Telefonnummern jeweils mit Vorwahl und den ersten drei Ziffern der Rufnummer auf. Der Rest der Telefonnummern wird stets durch drei Sterne anonymisiert.  
(Ein Anruf beim GNR würde z.B. durch 05244986\*\*\* anonymisiert.)  
Berechne die Anzahl der Rufnummern, die durch die gleiche Ziffernfolge 05244986\*\*\* anonymisiert werden könnten, wenn in Rietberg (Vorwahl 05244) 4-, 5- und 6-stellige Telefonnummern möglich sind.
- f) Die Telefongesellschaft behauptet, der Anteil derjenigen Kunden, die bei erneutem Vertragsabschluss wieder ein TIP wünschen („TIP-Wiederholer“), betrage mindestens 60%. Diese Vermutung soll an Hand einer Zufallsstichprobe von 300 Kunden abgesichert werden.  
Die Entscheidungsregel (auf dem 5%-Signifikanzniveau) lautet:  
*Gehe genau dann von wenigstens 60% TIP-Wiederholern aus, wenn sich von 300 Befragten mehr als 165 für eine TIP-Wiederholung aussprechen.*
  - i) Mit  $X$ : Anzahl der TIP-Wiederholer ist die Gütefunktion  $g$  definiert durch  
$$g(p) = 1 - P_p(X \geq 166)$$
  
Berechne  $g(0,55)$ .  
Interpretiere  $g(0,55)$  inhaltsbezogen auf das vorliegende Beispiel.
  - ii) Skizziere nur mit Hilfe der bisherigen Angaben und Ergebnisse aus Teilaufgabe i) den Graphen der Gütefunktion  $g$ . Bestimme im Rahmen der Zeichengenauigkeit mit Hilfe von Graph  $g$  denjenigen Wert von  $p$ , bei dem die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art genau 10% beträgt.

Aufg.-Nr.: 29	Bereich: Stochastik – ohne Testverfahren	Kursart: LK	CAS
---------------	--	-------------	-----

**Anlage : TIP-Informationen**

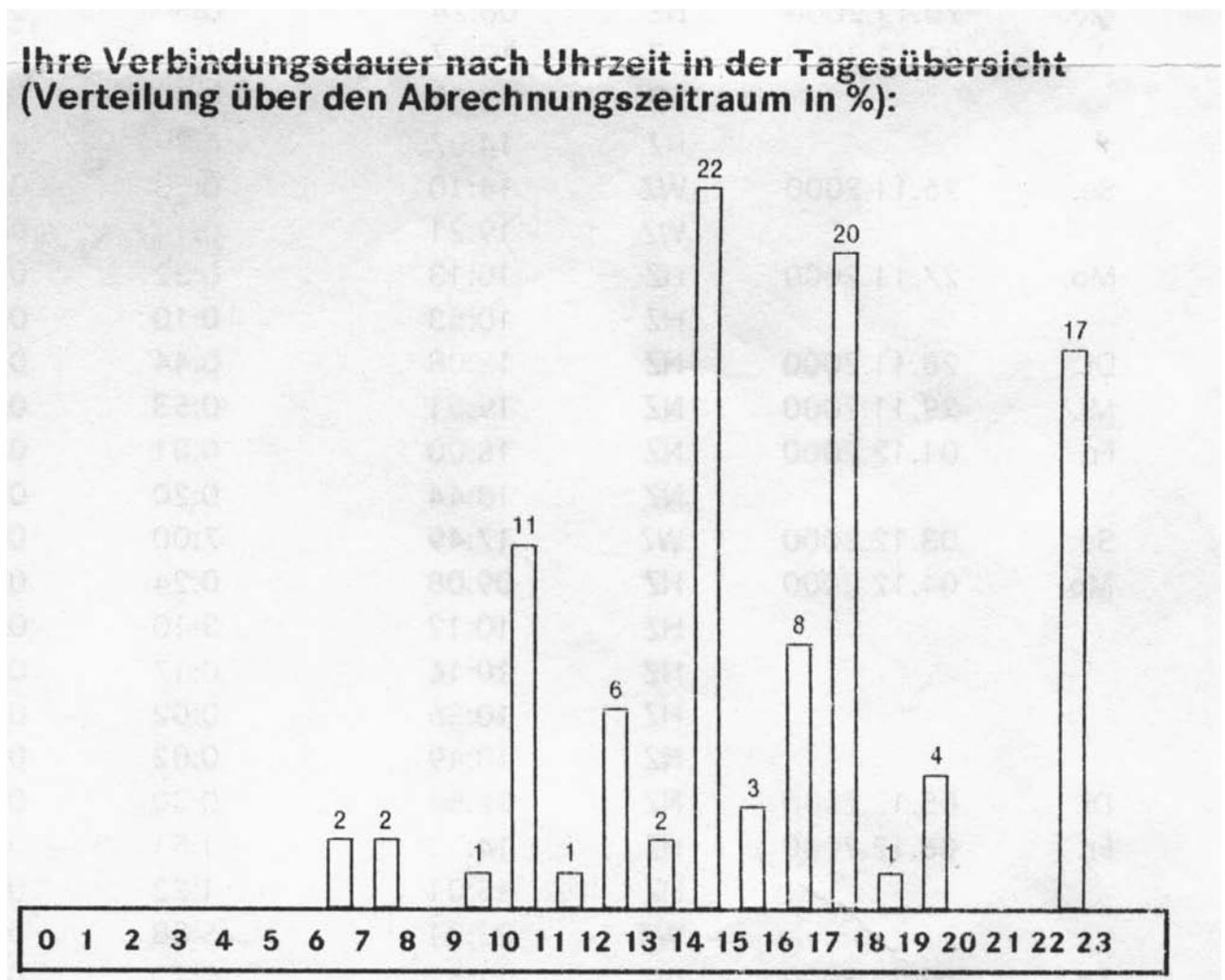
**Tabelle 1**

Art	Zeit	Kosten pro Minute
		(in Euro) (Sek.genaue Abrechnung)
Nationales Festnetz	HZ	0,49
	NZ	0,19
	WZ	0,09
Netzzintern	HZ	0,29
	NZ	0,19
Mailboxabfrage	HZ	0,29
HZ: 6-18		NZ: 18-6
WZ: Fr 18 - Mo 6		

**Tabelle 2**

Art	Zeit	Nettobetrag Euro in %	
National. Festnetz	HZ	10,00	41
	NZ	0,90	4
	WZ	2,86	12
Netzzintern	HZ	7,11	29
	NZ	1,36	5
Mailboxabfrage	HZ	2,07	9
<b>Verbindungen insgesamt</b>		<b>24,30</b>	<b>100</b>

**Tabelle 3**



Aufg.-Nr.: 30	Bereich: Stochastik – ohne Testverfahren	Kursart: LK	WTR
---------------	--	-------------	-----

## Onliner-Atlas

In der Anlage finden Sie die Kopie einer Seite aus dem (N)Onliner-Atlas 2005. Dieser wurde von TNS-Emnid im Auftrag etlicher Firmen und Verbände erstellt und gibt Auskunft über die Nutzung des Internets. Dabei ging es um die Anteile an „Usern“ in der Gesellschaft, und zwar in Abhängigkeit vom Verdienst, vom Alter, von der Ausbildung, usw.

Zusätzlich fand eine Befragung statt, bei der nur Online-Nutzer zu bestimmten Fragen Stellung nehmen durften. In der Anlage finden Sie eine Tabelle zur „Mediennutzung“ und etliche Aussagen, die sich auf diese Tabelle (und andere Aspekte aus der Umfrage) beziehen.

a) Die Darstellung ist nicht sehr exakt.

1. Die Frage aus der Überschrift hätte z.B. lauten müssen: „Wie lange nutzen....?“ Erklären Sie, warum die abgedruckte Fragestellung missverständlich ist.
2. „Das Internet wird fast so intensiv und häufig genutzt...wie der Fernseher“ (1.Satz) Entscheiden Sie, ob sich diese Aussage anhand der Tabelle belegen lässt und begründen Sie ihre Entscheidung.

b)

1. Erklären Sie die Bedeutung der Angabe 63,4% in der 3.Zeile und 2. Spalte.
2. Begründen Sie, dass die Zeilensumme in der Tabelle jeweils den Wert Eins hat, die Spaltensumme aber nicht.

c) Die Aufgaben in diesem Abschnitt beziehen sich alle auf Personen, die online sind, und sich entsprechend den Angaben der Zeile „Internet“ verteilen.

1. In einem Mathematik-Kurs mit 15 Schüler(inne)n sind alle „online“ und entsprechend der Zeile „Internet“ verteilt.  
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei vier ausgewählten Personen des Kurses
  - kein „High“-User darunter ist
  - höchstens drei „High“-User darunter sind .
2. Es werden nun im Kreis Gütersloh 15 Onliner zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
  - kein „High“-User darunter ist
  - weniger als drei „High“-User darunter sind .
3. Sie befragen nun eine Gruppe von 512 Onlinern.  
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass darunter zwischen 130 und 145 (einschließlich) „High“-User sind.
4. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 512 ausgewählten Onlinern mindestens vier Personen sind, die das Internet nach eigener Angabe „gar nicht“ nutzen.

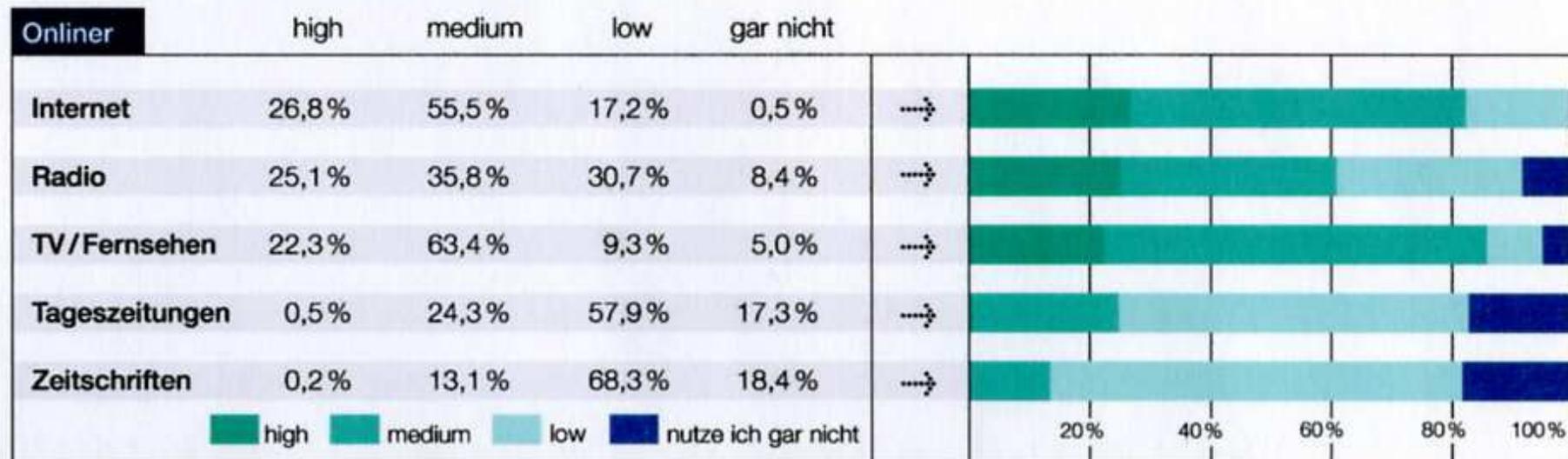
eine Anlage

Auszug aus dem **(N)ONLINER Atlas 2005** Seite 67

## Mediennutzung

Frage: Wie oft nutzen Sie durchschnittlich pro Tag folgende Medien?

(Basis: n = 1.000)



Definition: Low User = weniger als eine Stunde; Medium User = eine bis drei Stunden; High User = mehr als drei Stunden

Das Internet wird fast so intensiv und häufig genutzt wie der Fernseher, intensiver als andere „alte“ Medien wie Radio und Printmedien. Printmedien – und hier vor allem die Tageszeitungen – sind jedoch immer noch das vorrangige Informationsmedium. Fast 90 Prozent der Onliner nennen „sich informieren“ als einen der wichtigsten Gründe zu surfen.

Aufg.-Nr.: 31	Bereich: Stochastik – ohne Testverfahren	Kursart: LK	WTR
---------------	--	-------------	-----

## Kinderglück

Lesen Sie bitte den Auszug eines Zeitungsartikels rechts!

1)

- a) Nehmen Sie an, bei einer kleinen Umfrage unter 80 westdeutschen Frauen wäre die Anzahl derer, die Kinder als sehr wichtig für sich einschätzen, binomialverteilt mit  $p = 0,66$ . Bestimmen Sie unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Umfrage höchstens 50 Frauen Kinder als sehr wichtig für ihr Leben erachten.
- b) Begründen Sie, warum die Annahme, dass die oben erwähnte Anzahl binomialverteilt ist, nur näherungsweise zutrifft.
- c) Ermitteln Sie, wie viel Prozent der für den Zeitungsartikel befragten Frauen Westdeutsche sind. Zeichnen Sie ein Baumdiagramm.
- d) Aus dem Kreis der befragten Frauen sei von einer Frau bekannt, dass sie Kinder als sehr wichtig für ihr Leben einstuft. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie eine Westdeutsche ist. Falls Sie 1c) nicht lösen konnten, so nehmen Sie als Ersatzlösung an, dass 84 % der befragten Frauen aus Westdeutschland waren.

### Umfrage: Die meisten Frauen in Deutschland betrachten Kinder als ein Glück

**Hamburg** – Die meisten deutschen Frauen betrachten einer Umfrage zufolge Kinder als Glück. Für 69 Prozent der Frauen sind sie „sehr wichtig“ für die Erfüllung des eigenen Lebens.

(...)

Auch zwischen West und Ost gibt es Unterschiede: In Westdeutschland sagen 66 Prozent aller Frauen (...), daß eigene Kinder sehr wichtig für das persönliche Glück sind, in Ostdeutschland sind dies mit 85 Prozent deutlich mehr.

**Die Welt, 11. Juli 2005**

2)

- a) Kindermangel ist eines der Hauptprobleme in Deutschland. Die Regierung möchte den Anteil von 66 % der westdeutschen Frauen, die Kinder als sehr wichtig für sich ansehen, durch verschiedene Aktionen erhöhen. Ein Jahr später soll dann bei einem Stichprobenumfang von 120 westdeutschen Frauen eine neue Umfrage durchgeführt werden. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel eines geeigneten Hypothesentests zur Frage, ob die Aktion den erwünschten Erfolg gebracht hat (Irrtumswahrscheinlichkeit: 5 %).  
Erklären sie Ihre Vorgehensweise.
- b) Nun wird 2a) verallgemeinert: Ermitteln Sie eine Funktion  $f$ , die einem Stichprobenumfang  $x$  die Grenze  $f(x)$  (muss hier nicht gerundet sein) des Ablehnungsbereichs zuweist.